Marcel N. Roşculeţ Ovidiu I. Popescu

PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂŢĂMÎNTUL SUPERIOR

Editura didactică şi pedagogică
Bucureşti, 1971

Scanned with OKEN Scanner

Iaşi. 21.09.1971
Vălcu D. Mihai

Ministerul Învăţământului

MARCEL N. ROŞCULEŢ

OVIDIU I. POPESCU

PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂŢĂMÂNTUL SUPERIOR

Editura didactică şi pedagogică
Bucureşti, 1971

Scanned with OKEN Scanner

Referent ştiinţific: Prof. dr. doc. A. HALANAY

Redactor: POP AVRAM

Tehnoredactor: OTTO NECŞOIU

Coperta: SIMONA SCARLAT

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Prezentele „Probleme" au fost scrise cu scopul de a sprijini candidații la concursurile de admitere în institutele de învățămînt superior.

În prima parte problemele rezolvate urmăresc indeaproape programa analitică a disciplinei „analiză matematică" pentru admitere.

În a doua parte s-au rezolvat probleme construite în așa fel încît să adîncească noțiunile de analiză și să realizeze în același timp legături cu celelalte discipline ca: algebra, geometria, trigonometria.

Nu am adoptat o anumită ordine în succesiunea problemelor în această a doua parte, două probleme alăturate fiind în general complet diferite, pentru a obișnui pe cel care le rezolvă cu caracterul de surpriză pe care îl prezintă însuși concursul de admitere.

S-au introdus și probleme date în ultimii ani de diverse institute din țară la acest concurs.

Autorii

Capitolul I

Şiruri numerice.
Şiruri monotone.
Şiruri convergente.
Progresii.
Serii numerice.

Scanned with OKEN Scanner

1. Se dă şirul cu termenul general

$$u_n = \cos n\frac{\pi}{4},\ n \in N$$

şi se cere:

1. să se determine marginea superioară şi marginea inferioară;
2. să se determine limitele superioară şi inferioară;
3. să se deducă din rezultatul obţinut dacă $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ există.

R. 1) Avem $u_1 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $u_2 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$,

$$u_3 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ u_4 = \cos\pi = -1,$$

$$u_5 = \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ u_6 = \cos\frac{3\pi}{2} = 0,$$

$$u_7 = \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ u_8 = \cos 2\pi = 1,$$

... general

$$u_{8m+1} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad u_{8m+2} = 0,$$

$$u_{8m+3} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad u_{8m+4} = -1,\quad u_{8m+5} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$u_{8m+6} = 0,\quad u_{8m+7} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad u_{8m+8} = 1,\ m \in N.$$

Rezultă:

2) $m = l = -1, \qquad M = L = +1.$

Șirul are cinci puncte limită. Nu este un șir convergent.

3) Consecință: funcția $\cos \frac{1}{x}$ nu are limită cînd $x \to 0$; în adevăr, pentru ca $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ să existe trebuie ca pentru orice șir $(x_n)_{n \in N}$ cu $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, șirurile $\left(\cos \frac{1}{x_n}\right)_{n \in N}$ să aibă o limită comună finită.

Putem scrie

$$\cos n \frac{\pi}{4} = \cos \frac{1}{\frac{1}{n} \frac{4}{\pi}};$$

dacă luăm $x_m = \frac{1}{8m} \frac{4}{\pi}$, $m \in N$, rezultă că

$$\cos \frac{1}{x_m} = \cos 2m\pi = 1, \text{ deci și } \lim_{m \to \infty} \cos \frac{1}{x_m} = 1;$$

dacă luăm $x'_m = \frac{1}{8m+1} \cdot \frac{4}{\pi}$, $m \in N$, rezultă

$$\cos \frac{1}{x'_m} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ deci } \lim_{m \to \infty} \cos \frac{1}{x'_m} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

prin urmare pentru cele două șiruri (x_m) și (x'_m), convergente către zero, șirurile valorilor $\left(\cos \frac{1}{x_m}\right)$ și $\left(\cos \frac{1}{x'_m}\right)$ nu au aceeași limită; deducem de aici că $\lim_{x \to 0} \cos \frac{x}{1}$ nu există.

2. Să se arate că șirul cu termenul general

$$s_n = \frac{1 + (-1)^n n}{1 + 2n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

nu este convergent.

R. Șirul conține termeni pozitivi de forma

$$s_{2n} = \frac{1 + 2n}{1 + 4n}$$

și termeni negativi de forma

$$s_{2n+1} = \frac{1 - 2n - 1}{1 + 4n + 2} = \frac{-2n}{4n + 3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm acum șirul cu termenul general

$$t_n = \frac{1 + 2n}{1 + 4n};$$

acest șir este convergent și are limita $\frac{1}{2}$.

Șirul cu termenul general

$$t'_n = \frac{-2n}{4n + 3}$$

este de asemenea convergent și are limita $-\frac{1}{2}$. Să observăm acum că în afara oricărei vecinătăți a punctului $\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right)$ cu $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ există o infinitate de termeni ai șirului (s_n), anume toți termenii șirului (t'_n); tot astfel în afara oricărei vecinătăți $\left(-\frac{1}{2} - \varepsilon, -\frac{1}{2} + \varepsilon\right)$ cu $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ există o infinitate de termeni ai șirului (s_n) anume toți termenii șirului (t_n). Șirul (s_n) are două puncte limită, $\frac{1}{2}$ și $-\frac{1}{2}$, deci nu este convergent.

3. Se dă suma

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

și se cere să se calculeze sumele:

1) $1 + \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \ldots + \frac{n^3}{n!} + \ldots,$

2) $1 + \frac{1^4}{1!} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \ldots + \frac{n^4}{n!} + \ldots.$

R. 1) Vom exprima suma (1) cu ajutorul sumei care dă numărul e. În acest scop scriem termenul general numai cu ajutorul factorialelor:

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + A\frac{n(n-1)}{n!} + B\frac{n}{n!} + C\frac{1}{n!};$$

deci trebuie să determinăm numerele A, B, C astfel încît să avem pentru orice n

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + An(n-1) + Bn + C,$$

sau

$$n^3 = n^3 + n^2(A - 3) + n(2 - A + B) + C,$$

deci

$$A = 3, \qquad B = 1, \qquad C = 0;$$

Scanned with OKEN Scanner

bținem astfel

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 3\frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!},$$

deci

$$(\alpha) \qquad \frac{n^3}{n!} = \frac{1}{(n-3)!} + 3\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}.$$

Prin convenție luăm $0! = 1$. Formula (α) este adevărată însă numai pentru $n \geqslant 3$. Pentru $n = 1, 2$ avem,

$$\frac{1^3}{1!} = \frac{1}{0!},$$

$$\frac{2^3}{2!} = 3\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}.$$

În continuare, folosind (α), rezultă

$$\frac{3^3}{3!} = \frac{1}{0!} + \frac{3}{1!} + \frac{1}{2!},$$

$$\frac{4^3}{4!} = \frac{1}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{1}{3!},$$

. . . . . .

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{}{(n-1)!};$$

. . . . . .

deci

$$1 + \sum_1^\infty \frac{n^3}{n!} = 1 + e + 3e + e = 1 + 5e.$$

2) În mod analog trebuie să avem pentru orice n

$$n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + An(n-1)(n-2) + Bn(n-1) + Cn,$$

care ne dă $A = 6$, $B = 7$, $C = 1$, deci

$$1 + \sum_1^\infty \frac{n^4}{n!} = 1 + 15e.$$

4. Se dă șirul cu termenul general

$$s_n = \frac{n-1}{2n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

1) Să se găsească limita s a șirului.

Scanned with OKEN Scanner

2) Pentru $\varepsilon > 0$ să se găsească $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ toţi termenii s_n să se găsească în vecinătatea

$$(s - \varepsilon, \quad s + \varepsilon).$$

Aplicaţie

$$\varepsilon = 10^{-10}.$$

R. 1) Putem scrie pe s_n astfel

$$s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+1-3}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{2n+1}$$

şi pentru că şirul cu termenul general $t_n = \frac{1}{2n+1}$ este convergent către zero rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}.$$

2) Trebuie să avem

$$|s_n - s| < \varepsilon \text{ pentru orice } n > N(\varepsilon),$$

sau

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon,$$

sau

$$\frac{3}{2}\frac{1}{2n+1} < \varepsilon;$$

deci

$$4n + 2 > \frac{3}{\varepsilon}, \qquad n > \frac{1}{4}\left(\frac{3}{\varepsilon} - 2\right).$$

Putem lua

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{4}\frac{3 - 2\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Dacă $\varepsilon = 10^{-10}$ atunci

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{4}\frac{3 - 2\cdot 10^{-10}}{10^{-10}} = \frac{1}{4}(3 \cdot 10^{10} - 2).$$

5. Se dă şirul cu termenul general

$$s_n = \frac{1}{1(1+k)} + \frac{1}{2(2+k)} + \ldots + \frac{1}{n(n+k)}$$

unde k este un număr natural. Se cere:

1) să se arate că şirul este convergent. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} s_n$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Să se deducă suma seriei

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+k)}.$$

R. 1) Observăm că se poate scrie

$$\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right),$$

deci

$$s_n = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+k}\right) + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+k}\right) + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3+k}\right) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right),$$

$$s_n = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{k}\left(\frac{1}{1+k} + \frac{1}{2+k} + \ldots + \frac{1}{n+k}\right),$$

de unde rezultă imediat

$$s_n = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+k}\right);$$

dacă trecem la limită obţinem

$$(\alpha) \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right),$$

deci şirul este convergent cu limita dată de (α).

2) Observăm că şirul sumelor parţiale ale seriei

$$\sum^{\infty} \frac{1}{n(n+k)}$$

este şirul $(s_n)_{n\in N}$, prin urmare seria dată este convergentă şi are ca sumă S dată de

$$S = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right).$$

6. Se dă şirul cu termenul general

$$s_n = \frac{n+1}{n^2+1};$$

folosind definiţia cu ε să se arate că este convergent către zero. Pentru $\varepsilon = \frac{1}{10^5}$ să se determine $N(\varepsilon)$.

Scanned with OKEN Scanner

R. Folosim definiția cu ε: „Un șir $(s_n)_{n\in N}$ este convergent și are limita s dacă la orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$

$$|s_n - s| < \varepsilon.$$

Să luăm $s = 0$ și să observăm că $s_n > 0$; pentru ca șirul $(s_n)_{n\in N}$ să fie convergent trebuie să existe $N(\varepsilon)$ astfel încît

$$(\alpha) \qquad \frac{n+1}{n^2+1} < \varepsilon \qquad \text{pentru orice } n > N(\varepsilon).$$

Din neegalitatea (α) avem

$$n + 1 < \varepsilon(n^2 + 1),$$

sau

$$\varepsilon n^2 - n + \varepsilon - 1 > 0.$$

Rezolvăm ecuația

$$\varepsilon n^2 - n + \varepsilon - 1 = 0,$$

$$n_1 = \frac{1}{2\varepsilon}\left[1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon(\varepsilon - 1)}\right], \quad n_2 = \frac{1}{2\varepsilon}\left[1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon(\varepsilon - 1)}\right];$$

putem presupune $\varepsilon < 1$. Dacă luăm

$$N(\varepsilon) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon(1 - \varepsilon)}}{2\varepsilon}$$

pentru orice întreg $n > N(\varepsilon)$, $\frac{n+1}{n^2+1} < \varepsilon$, deci șirul este convergent și are limita 0.

Pentru $\varepsilon = 10^{-5}$ obținem

$$N(10^{-5}) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 10^{-5}(1 - 10^{-5})}}{2 \cdot 10^{-5}},$$

sau

$$N(10^{-5}) = \frac{1}{2}\left(10^5 + \sqrt{10^{10} + 4 \cdot 10^5 - 4}\right).$$

7. Se dă șirul cu termenul general

$$s_n = \frac{\sqrt{n+a} - \sqrt{n+b}}{\sqrt{n+c} - \sqrt{n+d}}, \qquad c \neq d;$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Scanned with OKEN Scanner

R. Dacă trecem la limită, observăm că atît la numărător cît și la numitor avem nedeterminarea $\infty - \infty$. Procedăm în modul următor

$$s_n = \frac{\sqrt{n+a} - \sqrt{n+b}}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n+b}} (\sqrt{n+a} + \sqrt{n+b}) \cdot \frac{\sqrt{n+c} + \sqrt{n+d}}{\sqrt{n+c} - \sqrt{n+d}} \frac{1}{\sqrt{n+c} + \sqrt{n+d}}$$

deci

$$s_n = \frac{a-b}{c-d} \cdot \frac{\sqrt{n+c} + \sqrt{n+d}}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n+b}},$$

formă în care se vede că șirul este convergent deoarece

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a-b}{c-d}.$$

8. Se dă șirul cu termenul general

$$s_n = \frac{\sqrt{an+b} - \sqrt{an+d}}{\sqrt[3]{a'n+b'} - \sqrt[3]{a'n+d'}};$$

să se calculeze $\lim_{n \to \infty} s_n$.

R. Observăm că atît numărătorul cît și numitorul, cînd $n \to \infty$, prezintă nedeterminări de forma $\infty - \infty$. Putem scrie însă

$$s_n = \frac{(an+b) - (an+d)}{\sqrt{an+b} + \sqrt{an+d}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(a'n+b')^2} + \sqrt[3]{(a'n+b')(a'n+d')} + \sqrt[3]{(a'n+d')^2}}{(a'n+b') - (a'n+d')}$$

sau

$$s_n = \frac{b-d}{\sqrt{an+b} + \sqrt{an+d}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(a'n+b')^2} + \sqrt[3]{(a'n+b')(a'n+d')} + \sqrt[3]{(a'n+d')}}{b'-d'}$$

și pentru $b' \neq d'$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă } \frac{b-d}{b'-d'} > 0, \\ -\infty, \text{ dacă } \frac{b-d}{b'-d'} < 0. \end{cases}$$

9. Se consideră șirul cu termenul general $u_n = a^{b^n}$, unde a, b sînt două numere pozitive.

1) Să se calculeze suma

$$E_n = \log_{u_0} N + \log_{u_1} N + \ldots + \log_{u_n} N;$$

2) Pentru ce valori ale lui b șirul cu termenul general E_n este convergent? În acest caz să se calculeze $\lim_{n\to\infty} E_n$.

1969. Institutul Politehnic, București.

R. 1) N este un număr pozitiv. Pentru $N = 1$ toți logaritmii ce intervin în expresia lui E_n sînt nuli, deci

$$E_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} E_n = 0.$$

În cele ce urmează presupunem că $N \neq 1$. Folosim formula

$$\log_u v \cdot \log_v u = 1,$$

deci

$$\log_{u_k} N \cdot \log_N u_k = 1 \text{ sau } \log_{u_k} N \cdot b^k \log_N a = 1,$$

deci

$$E_n = \frac{1}{\log_N a}\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \ldots + \frac{1}{b^n}\right);$$

avem

$$1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \ldots + \frac{1}{b^n} = \frac{\frac{1}{b^{n+1}} - 1}{\frac{1}{b} - 1},$$

de unde

$$E_n = \frac{1}{\log_N a} \cdot \frac{1}{b^n} \cdot \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}.$$

2) Șirul $(E_n)_{n\in N}$ este convergent dacă progresia geometrică

$$1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \ldots + \frac{1}{b^n} + \ldots$$

este convergentă; acest fapt are loc dacă $b > 1$. Pentru $b > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^{n+1}} = 0,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \frac{1}{\log_N a} \cdot \frac{b}{b-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

10. Să se discute, după $a > 0$, natura şirului cu termenul general

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{a^m}{(1 + 2a^{m+1})(1 + 2a^{m+2})}.$$

R. Pentru $a = 1$, obţinem

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{3^2} = \frac{n}{3^2},$$

prin urmare $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, deci şirul este divergent. Vom presupune în cele ce urmează că $a \neq 1$. Putem scrie

$$\frac{1}{(1 + 2a^{m+1})(1 + 2a^{m+2})} = \left(\frac{1}{1 + 2a^{m+1}} - \frac{1}{1 + 2a^{m+2}}\right)\frac{1}{2a^m(a - 1)a}$$

sau

$$\frac{a^m}{(1 + 2a^{m+1})(1 + 2a^{m+2})} = \frac{1}{2a(a - 1)}\left(\frac{1}{1 + 2a^{m+1}} - \frac{1}{1 + 2a^{m+2}}\right)$$

deci

$$s_n = \frac{1}{2a(a - 1)}\left(\frac{1}{1 + 2a^2} - \frac{1}{1 + 2a^3} + \ldots + \frac{1}{1 + 2a^{n+1}} - \frac{1}{1 + 2a^{n+2}}\right)$$

şi

$$s_n = \frac{1}{2a(a - 1)} \cdot \left(\frac{1}{1 + 2a^2} - \frac{1}{1 + 2a^{n+2}}\right).$$

Pentru $a < 1$, $a^{n+2} \to 0$ cînd $n \to \infty$ deci

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2a(a - 1)}\left(\frac{1}{1 + 2a^2} - 1\right), \quad a < 1.$$

Pentru $a > 1$, $a^{n+2} \to \infty$ cînd $n \to \infty$ deci

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2a(a - 1)} \cdot \frac{1}{1 + 2a^2}, \quad a > 1.$$

11. Se dă şirul cu termenul general

$$s_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}}_{n \text{ radicali}}, \quad a > 0.$$

Se cere:

1) să se arate că pentru orice $a > 0$ este convergent;

2) să se calculeze $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Pentru ce valori ale lui a, s este raţional?

II. 1) Avem $s_1 = \sqrt{a}$, $s_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, deci $s_1 < s_2$; să presupunem că

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1}$$

şi să arătăm că $s_{n-1} < s_n$. Avem

$$s_n^2 = a + s_{n-1}, \quad s_{n-1}^2 = a + s_{n-2},$$

prin scădere obţinem

$$(s_n - s_{n-1})(s_n + s_{n-1}) = s_{n-1} - s_{n-2}$$

şi pentru că $s_n + s_{n-1} > 0$, $s_{n-1} - s_{n-2} > 0$ rezultă şi

$$s_n - s_{n-1} > 0,$$

deci şirul este strict crescător. Din relaţia

$$s_n^2 = a + s_{n-1} \text{ deducem } s_n^2 < a + s_n,$$

sau

$$s_n^2 - s_n - a < 0.$$

Ecuaţia

$$u^2 - u - a = 0$$

are rădăcina pozitivă

$$2u = 1 + \sqrt{1 + 4a}$$

şi pentru că $s_n > 0$ rezultă că

$$2s_n < 1 + \sqrt{1 + 4a},$$

deci şirul s_n este mărginit superior. Fiind monoton crescător şi mărginit este convergent ori care ar fi $a > 0$.

2) Din

$$s_{n+1}^2 = a + s_n,$$

trecînd la limita, obţinem

$$s^2 = a + s$$

şi pentru că $s > 0$ rezultă $s = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4a}\right)$.

Limita s este raţională dacă $\sqrt{1 + 4a} = k$ cu k raţional. Avem

$$1 + 4a = k^2, \quad a = \frac{k^2 - 1}{4}, \qquad k > 1.$$

În această situație $s = \frac{1}{2}(1 + k)$. Se mai observă că pentru orice $a > 0$, $s > 1$.

În particular șirul cu termenul general

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{k^2-1}{4} + \sqrt{\frac{k^2-1}{4} + \sqrt{\frac{k^2-1}{4} + \ldots + \sqrt{\frac{k^2-1}{4}}}}}$$

este convergent și are limita $\frac{1}{2}(1 + k)$.

12. Se consideră șirul cu termenul general

$$a_n = \frac{(n+3)^2 + 3}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

și se cere:

1) să se arate că termenul general al șirului se poate scrie astfel:

$$a_n = f(n) - f(n+1)$$

unde f are forma

$$f(n) = \frac{nA + B}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{2^n}$$

A și B fiind constante; să se determine aceste constante;

2) să se arate că șirul cu termenul general

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

este convergent, determinîndu-i-se limita;

3) să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$c_n = b_n^{n2^n}.$$

1970, Institutul Politehnic, București.

R. 1) Din enunț rezultă

$$f(n) = \frac{nA + B}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{2^n}, \quad f(n+1) = \frac{(n+1)A + B}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}},$$

deci trebuie să avem

$$\frac{(n+3)^2 + 3}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = f(n) - f(n+1),$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

însă

$$f(n) - f(n+1) = \frac{2(n+2)(nA+B) - n\cdot[(n+1)A+B]}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

și pentrucă numitorii sînt egali mai rămîne să avem

$$2(n+2)(nA+B) - n(n+1)A - nB = (n+3)^2 + 3,$$

sau

$$n^2(2A-A) + n(2B+4A-A-B) + 4B = n^2 + 6n + 12,$$

relație care trebuie să fie adevărată pentru orice n. Egalînd coeficienții lui n^2, n și 1 obținem sistemul de trei ecuații cu 2 necunoscute A, B

$$A = 1, \quad B + 3A = 6, \quad 4B = 12$$

care trebuie să fie compatibil. Sistemul admite soluția

$$A = 1, \qquad B = 3,$$

deci

$$a_n = \frac{n+3}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{n+4}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2) Avem

$$b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

$$b_n = \frac{4}{1\cdot 2}\ \frac{1}{2} - \frac{5}{2\cdot 3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{5}{2\cdot 3}\ \frac{1}{2^2} - \frac{6}{3\cdot 4} \cdot \frac{1}{2^3} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{n+3}{n(n+1)}\ \frac{1}{2^n} - \frac{n+4}{(n+1)(n+2)}\ \frac{1}{2^{n+1}},$$

deci

$$b_n = 1 - \frac{n+4}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

și

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

3) Avem

$$c_n = b_n^{n2^n} = \left[1 - \frac{n+4}{(n+1)(n+2)}\ \frac{1}{2^{n+1}}\right]^{n\cdot 2^n},$$

deci c_n se scrie sub forma

$$c_n = \left[(1-h_n)^{\frac{-1}{h_n}}\right]^{k_n},$$

unde

$$h_n = \frac{n+4}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}, \quad k_n = -\frac{n(n+4)}{2(n+1)(n+2)}$$

şi deoarece avem

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} h_n = -\frac{1}{2},$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} (1 - h_n)^{-\frac{1}{h_n}} = e,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} c_n = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

13. Se dă şirul $(x_n)_{n\in N}$ definit de relaţiile

$$x_1^4 = 2 \quad x_0^2 + 8,$$
$$x_2^4 = 2 \quad x_1^2 + 8,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n+1}^4 = 2 \quad x_n^2 + 8,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

unde $0 < x_0 < 2$ şi $x_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Se cere:

1) să se arate că şirul este monoton crescător mărginit superior;

2) să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

R. 1) Pentru $0 < x_0 < 2$, $x_1^4 = 2x_0^2 + 8 < 16$, deci

$8 < x_1^4 < 16$, de unde $0 < x_1 < 2$. Să arătăm că $x_1 > x_0$.

Avem

$$x_1^4 - x_0^4 = -x_0^4 + 2x_0^2 + 8 = -(x_0^2 - 1)^2 + 9,$$

însă $x_0 < 2$, $x_0^2 < 4$, $x_0^2 - 1 < 3$ deci $(x_0^2 - 1)^2 < 9$, prin urmare

$$x_1^4 - x_0^4 > 0 \text{ sau } x_1 > x_0.$$

Să presupunem

$$0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < 2,$$

şi să arătăm că $x_{n-1} < x_n < 2$. Avem

$$x_n^4 = 2x_{n-1}^2 + 8,$$

și pentru că $0 < x_{n-1} < 2$ rezultă că $x_n < 2$ ca rădăcina pozitivă a ecuației $x_n = a$, $a < 16$. Să arătăm că $x_n > x_{n-1}$. Avem

$$x_n^4 - x_{n-1}^4 = -x_{n-1}^4 + 2x_{n-1} + 8 = -(x_{n-1} - 1)^2 + 9 > 0$$

deoarece

$$x_{n-1}^2 < 4, \quad x_{n-1}^2 - 1 < 3 \quad \text{deci} \quad (x_{n-1}^2 - 1)^2 < 9.$$

Am arătat că șirul $(x_n)_{n \in N}$ este monoton crescător, mărginit superior, deci este convergent.

2) Dacă în relația de recurență

$$x_{n+1}^4 = 2x_n^2 + 8$$

trecem la limită obținem ecuația

$$x^4 = 2x^2 + 8, \quad x = \lim_{n \to \infty} x_n,$$

care admite soluțiile

$$x' = +2, \quad x'' = -2, \quad x''' = +i\sqrt{2}, \quad x'''' = -i\sqrt{2},$$

singura soluție pozitivă este 2 deci

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 2.$$

Din relația de recurență deducem

$$x_1 = \sqrt[4]{8 + 2x_0^2},$$

$$x_2 = \sqrt[4]{8 + 2\sqrt{8 + 2x_0^2}},$$

$$x_3 = \sqrt[4]{8 + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{8 + 2x_0^2}}},$$

. . . . . .

$$x_n = \sqrt[4]{8 + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{\ldots + 2\sqrt{8 + 2x_0^2}}}},$$

. . . . . .

iar pentru orice $0 < x_0 < 2$, $\lim_{n \to \infty} x_n = 2$.

14. Să se arate că dacă șirul $(s_n)_{n \in N}$ este convergent și are ca limită pe s, atunci șirul cu termenul general

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$$

este convergent și are tot pe s ca limită.

R. Șirul $(s_n)_{n \in N}$ fiind convergent, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ încît pentru $n > N(\varepsilon)$, $|s_n - s| < \varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\sigma_n - s = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} - s = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n - ns}{n}.$$

Să notăm $N(\varepsilon) = N$; pentru $n > N$ putem scrie

$$\sigma_n - s = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_N - Ns}{n} + \frac{s_{N+1} + s_{N+2} + \ldots + s_n - (n-N)s}{n},$$

însă

$$|s_{N+1} - s| < \varepsilon, \quad |s_{N+2} - s| < \varepsilon, \ldots, |s_n - s| < \varepsilon,$$

deci

$$|\sigma_n - s| < \left|\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_N - Ns}{n}\right| + \frac{n-N}{n}\varepsilon;$$

putem alege pe n suficient de mare astfel încît să avem

$$\left|\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_N - Ns}{n}\right| < \varepsilon,$$

de unde rezultă

$$|\sigma_n - s| < 2\varepsilon, \quad n > N'(\varepsilon),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s.$$

15. Se dă şirul cu termenul general

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

se cere:

1) să se calculeze $\lim_{n\to\infty} s_n$;

2) din rezultatul obţinut să se deducă suma seriei

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

R. 1) Dacă se scrie

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \text{ sub forma } \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

avem

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și se obține prin identificare.

$$s_n = \frac{1}{2}\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{5} +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{6} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2},$$

deci

$$s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}.$$

ceea ce ne dă $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{4}$. Șirul este convergent și are limita $\frac{1}{4}$.

2) Seria este convergentă și are suma $S = \frac{1}{4}$.

16. Se dă șirul cu termenul general

$$s_n = \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{5}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}$$

și se cere:

1) să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$;

2) să se deducă suma seriei

$$(\alpha) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}.$$

R. 1) Observăm că se poate scrie

$$s_n = \frac{n+2+1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

sau

$$s_n = s_n' + s_n'',$$

cu

$$s'_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad s''_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

La exercițiile nr. 5 și 15 am arătat că (pentru $k = 1$),

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} s''_n = \frac{1}{4},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

2) Suma seriei este $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{5}{4}$, deoarece $(s_n)_{n\in N}$ este șirul sumelor parțiale ale seriei (α).

17. Se dă ecuația

$$2(2a+1)\cos^2 x + 3\cos x + 1 - a = 0, \qquad (\alpha)$$

unde a este un parametru real. Se cere:

1) să se rezolve ecuația;

2) să se determine a astfel încît ecuația să admită soluții în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$;

3) fie $(a_n)_{n\in N}$ cu $a_n \geqslant 1$ un șir de numere reale, crescător, divergent. Înlocuind în ecuația (α) pe a cu a_n, să se arate că există un șir descrescător de numere (ξ_n), $n \in N$ unde ξ_n este o rădăcină a ecuației (α), în care s-a înlocuit a cu a_n și $\xi_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Să se determine $\lim_{n\to\infty} \xi_n$.

1970 — Institutul Politehnic, București.

R. 1) Ecuația de gradul doi în $\cos x$ are rădăcinile

$$\cos x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8(2a+1)(1-a)}}{4(2a+1)} = \frac{-3 \pm (4a-1)}{4(2a+1)},$$

$$\cos x_1 = \frac{a-1}{2a+1}, \quad \cos x_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$x'_2 = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, \qquad x''_2 = 2k\pi - \frac{2\pi}{3},$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $-1 \leqslant \frac{a-1}{2a+1} \leqslant +1$, există și soluțiile x_1', x_1''.

2) Pentru ca ecuația să admită soluții in intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ trebuie ca

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{a-1}{2a+1} \leqslant 1,$$

sau

$$\frac{a-1}{2a-1} - 1 \leqslant 0, \text{ deci } a \in (-\infty, -2] \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

și

$$\frac{a-1}{2a+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant 0, \text{ deci } a \in \left[\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Ambele neegalități sînt satisfăcute dacă

$$a \in -\left[\frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}, -2\right].$$

3) Pentru orice $a_n \geqslant 1$ avem $\frac{a_n - 1}{2a_n + 1} \geqslant 0$, deci există o valoare $x = \xi_n$ cu $\xi_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Fie $(a_n)_{n \in N}$, $a_n \geqslant 1$ un șir monoton divergent. Șirul $(u_n)_{n \in N}$ unde

$$u_n = \cos \xi_n = \frac{a_n - 1}{2a_n + 1}$$

este monoton crescător. Să arătăm că neegalitatea

$$\frac{a_{n+1} - 1}{2a_{n+1} + 1} > \frac{a_n - 1}{2a_n + 1};$$

nu este în contradicție cu monotonia șirului (a_n). Putem scrie

$$(2a_n + 1)(a_{n+1} - 1) > (2a_{n+1} + 1)(a_n - 1),$$

sau

$$2a_n a_{n+1} + a_{n+1} - 1 - 2a_n > 2a_n a_{n+1} + a_n - 1 - 2a_{n+1}$$

sau

$$3(a_{n+1} - a_n) > 0,$$

ceea ce demonstrează că $(u_n)_{n \in N}$ este monoton crescător. Șirul $(u_n)_{n \in N}$ este mărginit superior de $\frac{1}{2}$ deci este convergent. Avem

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n - 1}{2a_n + 1} = \frac{1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Şirul $(\cos \xi_n)_{n\in N}$ este monoton crescător şi are limita $\frac{1}{2}$ prin urmare pentru $\xi_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $(\xi_n)_{n\in N}$ este un şir monoton descrescător cu limita $\frac{\pi}{3}$.

18. Se dă şirul cu termenul general

$$s_n = \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)}\right);$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

R. Avem

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right),$$

deci

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right),$$

de unde rezultă pentru s_n expresia

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)};$$

prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{1}{2},$$

aşadar şirul este convergent şi are limita $\frac{1}{2}$.

19. Se dă şirul cu termenul general

$$s_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{7}{5^3} + \ldots + \frac{3n-2}{5^n}$$

şi se cere:

1) să se arate că este convergent;

2) să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Scanned with OKEN Scanner

R. 1) Avem

$$s_{n+1} - s_n = \frac{3(n+1)-2}{5^{n+1}} = \frac{3n+1}{5^{n+1}} > 0,$$

deci şirul este monoton crescător. Pentru a arăta că este convergent este suficient să dovedim că este mărginit. Putem scrie

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{5^2}\,\frac{3(n-1)-2+6}{5^{n-1}},$$

deci

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{5^2}\,\frac{3(n-1)-2}{5^{n-1}} + \frac{6}{5^{n+1}},$$

$$s_n = s_{n-1} + \frac{1}{5^2}\,\frac{3(n-2)-2}{5^{n-2}} + \frac{6}{5^n},$$

. . . . . .

$$s_3 = s_2 + \frac{1}{5^2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{6}{5^3}.$$

Dacă adunăm pe coloane obţinem

$$s_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{1}{5^2}\,s_{n-1} + \frac{6}{5^3}\left(1 + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{5^{n-2}}\right)$$

şi cum

$$1 + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{5^{n-2}} = \frac{1 - \dfrac{1}{5^{n-1}}}{1 - \dfrac{1}{5}},$$

rezultă că

$$s_{n+1} = \frac{9}{5^2} + \frac{1}{5^2}\,s_{n-1} + \frac{6}{5^3}\,\frac{1 - \dfrac{1}{5^{n-1}}}{1 - \dfrac{1}{5}}, \qquad (\lambda)$$

şi pentru că

$$s_{n-1} < s_{n+1},$$

urmează că

$$s_{n+1} < \frac{9}{5^2} + \frac{1}{5^2}\,s_{n+1} + \frac{6}{5^3}\cdot\frac{5}{4},$$

sau

$$\frac{24}{25}\,s_{n+1} < \frac{9}{5^2} + \frac{6}{4\cdot 5^2},$$

deci şirul este mărginit. Fiind şi monoton este convergent.

Scanned with OKEN Scanner

2) Să notăm $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Dacă trecem la limita în (λ) obținem

$$s = \frac{9}{5^2} + \frac{1}{5^2}s + \frac{3}{2 \cdot 5^2},$$

sau

$$\frac{24}{25}s = \frac{21}{50}, \quad s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{21}{48} = \frac{7}{16}.$$

20. Se dă șirul cu termenul general

$$s_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n^p + h}} + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p + 2h}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p + nh}}, \quad h > 0, \; p > 1$$

se cere:

1) să se arate că este mărginit;

2) să se arate că este convergent și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} s_n$.

R. 1) Șirul $(s_n)_{n\in N}$ este un șir de numere pozitive deci este mărginit inferior. Avem și

$$s_n < \frac{n}{\sqrt[p]{n^p + h}} < \frac{n}{\sqrt[p]{n^p}} = 1,$$

deci pentru orice $n \in N$, $s_n < 1$; am arătat că șirul $(s_n)_{n\in N}$ este mărginit.

2) Avem inegalitățile

$$\frac{n}{\sqrt[p]{n^p + nh}} < s_n < \frac{n}{\sqrt[p]{n^p + h}},$$

sau

$$\frac{1}{\sqrt[p]{1 + \frac{h}{n^{p-1}}}} < s_n < \frac{1}{\sqrt[p]{1 + \frac{h}{n^p}}}, \quad p > 1,$$

însă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{1 + \frac{h}{n^{p-1}}}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{1 + \frac{h}{n^p}}} = 1,$$

de unde rezultă imediat că $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

Prin urmare șirul $(s_n)_{n\in N}$ este convergent și are limita 1.

Scanned with OKEN Scanner

21. Se dă curba formată din n semicercuri de raze

$$r_m = \frac{h}{(m+1)\sqrt{m} + m\sqrt{m+1}}, \quad m = 1, 2, \ldots, n; \; h > 0.$$

1) Să se calculeze lungimea l_n a liniei formate de aceste n semicercuri. Să se arate că $\lim_{n\to\infty} l_n = l$ există.

2) Pentru ce valori ale lui n, $l - l_n < 10^{-3}$.

R. 1) Avem

$$l_n = \pi(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) = h\pi \sum_1^n \frac{1}{(m+1)\sqrt{m} + m\sqrt{m+1}}.$$

Observăm că se poate scrie

$$\frac{1}{(m+1)\sqrt{m} + m\sqrt{m+1}} = \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m+1}} = \frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}},$$

deci

$$\sum_1^n r_m = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+n}}$$

$$l_n = h\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right); \quad l = \lim_{n\to\infty} l_n = h\pi.$$

2) Trebuie să avem

$$l - l_n > 10^{-3} \text{ sau } h\pi \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 10^{-3},$$

sau

$$\sqrt{n+1} < h\pi 10^3, \text{ deci } n > h^2\pi^2 10^6 - 1.$$

22. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ un şir de numere pozitive în progresie geometrică crescătoare şi p un număr natural. Se cere:

1) să se arate că raportul sumelor

$$S_n = \frac{1}{a_2^p + a_1^p} + \frac{1}{a_3^p + a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}^p + a_n^p},$$

$$S_n' = \frac{1}{a_2^p - a_1^p} + \frac{1}{a_3^p - a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}^p - a_n^p},$$

nu depinde de n;

Scanned with OKEN Scanner

2) să se determine raţia progresiei date astfel ca

$$\frac{a_n}{a_{n-2}+a_{n+2}}=\frac{4}{17};$$

3) să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$;

4) fie $R=\frac{S_n}{S_n'}$; să se calculeze $\lim\limits_{p\to\infty} R^p$.

1970. Institutul Politehnic, Bucureşti.

R. 1) Dacă $r>1$ este raţia progresiei $a_1, a_2, \ldots,$ avem

$$a_2=ra_1, \ldots, a_{n+1}=ra_n,$$

deci

$$a_2^p+a_1^p=a_1^p(1+r^p), \ldots, a_{n+1}^p+a_n^p=a_n^p(1+r^p),$$

$$a_2^p-a_1^p=a_1^p(r^p-1), \ldots, a_{n+1}^p-a_n^p=a_n^p(r^p-1),$$

deci

$$S_n=\frac{1}{1+r^p}\left(\frac{1}{a_1^p}+\frac{1}{a_2^p}+\ldots+\frac{1}{a_n^p}\right),$$

$$S_n'=\frac{1}{r^p-1}\left(\frac{1}{a_1^p}+\frac{1}{a_2^p}+\ldots+\frac{1}{a_n^p}\right),$$

de unde

$$\frac{S_n}{S_n'}=\frac{r^p-1}{r^p+1},$$

deci raportul nu depinde de n şi nici de primul termen al progresiei.

2) Exprimăm pe a_{n+1} şi a_{n-2} în funcţie de a_n şi r, obţinem

$$a_{n+2}=a_nr^2, \qquad a_{n-2}=\frac{1}{r^2}a_n$$

şi egalitatea de la punctul 2) se transformă în

$$\frac{1}{r^2+\frac{1}{r^2}}=\frac{4}{17} \quad \text{sau} \quad 4r^4-17r^2+4=0,$$

am obținut o ecuație bipătrată căreia îi căutăm soluțiile

$$r_1^2 = \frac{17 + \sqrt{17^2 - 64}}{8}, \qquad r_2^2 = \frac{17 - \sqrt{17^2 - 64}}{8},$$

$$r_1^2 = \frac{17 + 15}{8} = 4, \qquad r_2^2 = \frac{17 - 15}{8} = \frac{1}{4},$$

$$r_{11} = 2,\ r_{12} = -2,\ r_{21} = \frac{1}{2},\ r_{22} = -\frac{1}{2},$$

singura soluție care satisface problemei este

$$r = 2.$$

3) Trebuie să însumăm pe S_n. Avem

$$a_2^p = a_1^p r^p, \ \ldots, \ a_n^p = a_1^p r^{(n-1)p},$$

deci

$$S_n = \frac{1}{r^p + 1} \cdot \frac{1}{a_1^p}\left[1 + \frac{1}{r^p} + \frac{1}{r^{2p}} + \ldots + \frac{1}{r^{(n-1)p}}\right],$$

$$S_n = \frac{1}{r^p + 1} \frac{1}{a_1^p} \cdot \frac{\frac{1}{r^{np}} - 1}{\frac{1}{r^p} - 1},$$

și pentru ca $r > 1$, $\frac{1}{r^{np}} \to 0$ cînd $n \to \infty$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{r^p + 1} \frac{1}{a_1^p} \cdot \frac{-1}{\frac{1}{r^p} - 1} = \frac{r^p}{a_1^p} \cdot \frac{1}{r^{2p} - 1}.$$

4) Avem

$$R_n^p = \left(\frac{S_n}{S_n'}\right)^p = \left(\frac{r^p - 1}{r^p + 1}\right)^p = \left(\frac{r^p + 1 - 2}{r^p + 1}\right)^p,$$

$$R_n^p = \left(1 - \frac{2}{r^p + 1}\right)^p = \left[\left(1 - \frac{2}{r^p + 1}\right)^{-\frac{r^p + 1}{2}}\right]^{\frac{-2p}{r^p + 1}},$$

deoarece $r > 1$ rezultă că $r^p + 1 \to \infty$ cînd $p \to \infty$, deci

$$\lim_{p\to\infty}\left(1 - \frac{2}{r^p + 1}\right)^{-\frac{r^p + 1}{2}} = e.$$

Avem și

$$\lim_{p\to\infty} \frac{-2p}{r^p + 1} = 0;$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru calculul acestei limite este suficient să considerăm limita $\lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{r^x+1}$ căreia să-i aplicăm regula lui l'Hospital, apoi să luăm pentru x un șir (x_n) de numere naturale.

(Se poate proceda și în modul următor:

$$r^p = (1 + r - 1)^p \geqslant 1 + p(r-1) + \frac{p(p-1)}{2}(r-1)^2 \text{ cînd } p \geqslant 2;$$

deci:

$$0 < \frac{2p}{r^p+1} \leqslant \frac{2p}{2p(r-1)+\frac{p(p-1)}{2}(r-1)^2} < \frac{4}{(p-1)(r-1)^2},$$

și pentru că

$$\lim_{p\to\infty} \frac{4}{(p-1)(r-1)^2} = 0,$$

urmează că

$$\lim_{p\to\infty} \frac{-2p}{1+r^p} = 0).$$

Din cele de mai sus rezultă că $\lim_{p\to\infty} R_n^p = e^0 = 1$.

Capitolul II

Funcţii. Limite. Continuitate. Funcţii derivabile. Derivate. Formula creşterilor finite. Teorema lui Rolle. Forme nedeterminate. Extreme. Intervale de monotonie. Derivate de ordin superior.

Scanned with OKEN Scanner

1. Se dă funcţia

$$F(x) = \begin{cases} ae^x - be^{2x}, & x \in [0, 1), \\ \dfrac{9}{16}, & x = 1, \\ \dfrac{1}{16}(x^4 + 3x^2 + 5), & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

şi se cere să se determine a şi b astfel încît $f(x) = \sqrt{F(x)}$ să fie continuă pe $[0, +\infty)$.

R. Trebuie să avem $F(x) \geqslant 0$ şi F continuă pe $[0, \infty)$. Funcţia $g(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x^4 + 3x^2 + 5}$, $x \in (1, +\infty)$ este continuă pe $(1, +\infty)$ şi $\lim\limits_{x \to 1+0} g(x) = \frac{3}{4}$. Pentru ca funcţia

$$h(x) = \sqrt{ae^x - be^{2x}},$$

să fie definită pe $[0, 1)$ trebuie ca $ae^x - be^{2x} \geqslant 0$ sau $a - be^x \geqslant 0$, $e^x \leqslant \frac{a}{b}$, $b \neq 0$ Deoarece $e^x > 0$ rezultă $ab > 0$ deci $a > 0$, $b > 0$ sau $a < 0$, $b < 0$.

Deoarece $x \in [0, 1)$ trebuie să avem şi $1 < \frac{a}{b}$, $e < \frac{a}{b}$ deci $a > be$. Dacă $b = 0$, $a > 0$.

Condiţia de continuitate în $x = 1$ conduce la

$$\sqrt{ae - be^2} = \frac{3}{4}, \quad 16(a - be)e = 9, \quad a = be + \frac{9}{16e}$$

pentru orice $b \in R$.

2. Să se arate că funcţia

$$f(x) = (1 + 2 \sin x)\, e^x, \quad x \in R,$$

nu are limită cînd $x \to \infty$. Ce se întîmplă cînd $x \to -\infty$?

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Pentru a arăta că $f(x)$ nu are limită cînd $x \to +\infty$ este suficient să găsim două şiruri $(x_n)_{n\in N}$ cu limita $+\infty$ şi pentru aceste două şiruri, şirul $(f(x_n))_{n\in N}$ să aibă limite diferite.

Luăm şirul cu termenul general $x_n = 2\pi n - \frac{\pi}{6}$. Avem

$$f(x_n) = \left[1 + 2 \sin\left(2n\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] e^{2\pi n} e^{-\frac{\pi}{6}} = 0;$$

deoarece $1 + 2 \sin\left(2n\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 0$, n = natural, rezultă că şirul $(f(x_n))_{n\in N}$ avînd toţi termenii zero, are şi limita zero.

Dacă luăm şirul cu termenul general $x'_n = 2n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$ obţinem:

$$f(x'_n) = (1 + 2 \sin 2n\pi)e^{2n\pi} = e^{2n\pi}$$

şi $\lim\limits_{n\to\infty} e^{2n\pi} = +\infty$, deci pentru acest şir, şirul valorilor $(f(x'_n))_{n\in N}$ are limita $+\infty$.

b) Pentru orice şir $(x_n)_{n\in N}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ avem

$$-1 \leqslant 1 + 2 \sin x_n \leqslant +3$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} e^{x_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = 0;$$

rezultă că: $\lim\limits_{x\to-\infty} (1 + 2 \sin x)\, e^x = 0$,

deci funcţia $f(x)$ are limită cînd $x \to -\infty$.

3. Să se arate, fără să se folosească derivatele, că funcţiile

a) $f(x) = (x + 1)\, e^x$, $\quad x \in R$,

b) $g(x) = x \operatorname{Arctg} x$, $\quad x \in R$,

nu au un extremum pe $(0, +\infty)$.

R. Pentru ca o funcţie $h(x)$ să aibă un extremum pe un interval (a, b), într-un punct $x_0 \in (a, b)$ trebuie ca să existe o vecinătate a lui x_0, $V(x_0)$, astfel încît diferenţa

$$h(x) - h(x_0),$$

să păstreze un semn constant pentru orice $x \in V(x_0)$.

a) Funcţia e^x este pozitivă şi strict crescătoare pe $(0, \infty)$, deci pentru orice $x_1 < x < x_2$, $x_1, x, x_2 \in (0, \infty)$ avem

$$e^{x_1} < e^x < e^{x_2};$$

funcţia $x + 1$ este pozitivă şi strict crescătoare pe $(0, \infty)$ şi pentru orice $x_1 < x < x_2$, $x_1, x, x_2 \in (0, \infty)$ avem

$$x_1 + 1 < x + 1 < x_2 + 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă imediat că

$$(x_1 + 1)e^{x_1} < (x + 1)e^{x} < (x_2 + 1)e^{x_2};$$

deci în nici un punct $x \in (0, \infty)$ nu putem avea un extremum.

b) Funcția Arctg x este pozitivă și strict crescătoare pe $(0, \infty)$ deci pentru orice $x_1 < x < x_2$, $x_1, x, x_2 \in (0, \infty)$ avem

$$\text{Arctg } x_1 < \text{Arctg } x < \text{Arctg } x_2;$$

aceeași proprietate o are și x pe $(0, \infty)$ de unde rezultă la fel ca la punctul a) că

$$x_1 \text{ Arctg } x_1 < x \text{ Arctg } x < x_2 \text{ Arctg } x_2,$$

pentru orice $x_1 < x < x_2$ și $x_1, x, x_2 \in (0, \infty)$.

4. Se dă funcția

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}, \quad x \in R - \{0\},$$

și se cere:

1) să se arate că $f(x)$ nu este mărginită pe mulțimea de definiție;

2) să se stabilească intervalele de strictă monotonie ale lui $f(x)$;

3) pe intervalele de strictă monotonie să se găsească funcția inversă.

R. 1) O funcție f definită pe o mulțime I, nu este mărginită pe I, dacă la orice $A > 0$ există $x_A \in I$ astfel încît

$$|f(x_A)| > A.$$

Aplicăm această definiție. Deoarece $f(x) > 0$ pe mulțimea de definiție nu este necesar să mai luăm modulul. Trebuie să avem

$$(\alpha) \qquad \frac{x^2 + 1}{x^2} > A \text{ sau } x^2 + 1 > x^2 A$$

deci $x^2(A - 1) < 1$, sau $x'_A < \frac{1}{\sqrt{A-1}}$ sau $x''_A > \frac{-1}{\sqrt{A-1}}$.

Putem lua $A > 1$ deoarece,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 1 \text{ pe } R - \{0\}.$$

Pentru orice x'_A, $0 < x'_A < \frac{1}{\sqrt{A-1}}$, sau orice x''_A, $0 > x''_A > \frac{-1}{\sqrt{A-1}}$, neegalitatea (α) este satisfăcută. Se observă că $x'_A, x''_A \in R - \{0\}$.

2) Calculăm derivata lui $f(x)$; avem

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^2 - 2x(x^2 + 1)}{x^4} = \frac{-2}{x^3},$$

deci $f'(x) \leqslant 0$, $x \geqslant 0$; $f'(x) \geqslant 0$, $x \leqslant 0$.

Intervalele de strictă monotonie sînt $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

3) Avem

$$\frac{x^2+1}{x^2} = y \text{ sau } x^2(1-y)+1=0,$$

$$x_1 = \frac{-1}{\sqrt{y-1}}, \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{y-1}}.$$

Pe intervalul $(-\infty, 0)$ funcția inversă este

$$x = \frac{-1}{\sqrt{y-1}}, \qquad y \in (1, +\infty),$$

iar pe intervalul $(0, +\infty)$ funcția inversă este

$$x = \frac{1}{\sqrt{y-1}}, \qquad y \in (1, +\infty).$$

5. Se dă funcția

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln[1+\ln(a+x)]}{(x-a-1)^\alpha}, & x > a+1, \\ \dfrac{1}{2a+1}, & x = a+1, \end{cases}$$

pentru α, $a \in R_+$. Să se determine α astfel încît f să fie continuă la dreapta în punctul $x = a+1$.

R. Pentru a fi continuă la dreapta în punctul $x = a+1$ trebuie ca $f(x)$ să aibă limită la dreapta în acest punct și valoarea acestei limite să fie $\frac{1}{2a+1}$ deci

$$f(a+1+0) = \frac{1}{2a+1}.$$

Avem

$$\lim_{x \to a+1+0} \frac{\ln[1+\ln(x+a)]}{(x-a-1)^\alpha} = \lim_{x \to a+1+0} \frac{\frac{1}{1+\ln(x+a)} \cdot \frac{1}{x+a}}{(x-a-1)^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x \to a+1+0} \frac{1}{\alpha(x+a)(x-a-1)^{\alpha-1}},$$

și se observă că pentru $\alpha = 1$, limita există și este egală cu $\frac{1}{2a+1}$.

6. Să se stabilească dacă funcția

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|3x-1|}{\sin 3\pi x}\sqrt{1+x}, & x > -\dfrac{1}{2}, \quad x \neq \dfrac{k}{3}, \\ 0, & x = \dfrac{k}{3}, \quad k = -1, 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

este continuă în punctul $x = \frac{1}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

R. Pentru $x > \frac{1}{3}$, $x \neq \frac{k}{3}$,

$$f(x) = \frac{3x-1}{\sin 3\pi x}\sqrt{1+x},$$

deci

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}+0} f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{x \to \frac{1}{3}+0} \frac{3x-1}{\sin 3\pi x} = \lim_{x \to \frac{1}{3}+0} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{3}{3\pi \cos 3\pi x}$$

deci

$$f\left(\frac{1}{3}+0\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}\pi}.$$

Pentru $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$, $x \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{3}$,

$$f(x) = \frac{1-3x}{\sin 3\pi x}\sqrt{1+x},$$

deci

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}-0} f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{x \to \frac{1}{3}-0} \frac{1-3x}{\sin 3\pi x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{x \to \frac{1}{3}-0} \frac{-3}{3\cos 3\pi x}$$

sau

$$f\left(\frac{1}{3}-0\right) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi};$$

funcția f nu este continuă în punctul $x = \frac{1}{3}$ deoarece

$$f\left(\frac{1}{3}+0\right) \neq f\left(\frac{1}{3}-0\right) \neq f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Pentru înlăturarea nedeterminărilor am folosit regula lui l'Hospital.

7. Se dă funcția

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x}}, \qquad x \in R - \{0\}.$$

1) Să se arate folosind două șiruri convergente către zero că $f(x)$ nu are limită în punctul $x = 0$.

2) Să se calculeze $\lim_{x \to 0+} f'(x)$ și $\lim_{x \to 0-} f'(x)$.

R. 1) Considerăm șirurile $(x'_n)_{n \in N}$ și $(x''_n)_{n \in N}$ cu $x'_n = \frac{1}{n}$ și $x''_n = -\frac{1}{n}$, ambele convergente către zero.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $f(x'_n) = 2^n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$, deci șirul valorilor $(f(x'_n))_{n\in\infty}$ are limita $+\infty$. Avem deasemenea și $f(x''_n) = 2^{-n}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = 0$, deci pentru acest șir, șirul valorilor are limita 0. Funcția $2^{\frac{1}{x}}$ nu are limită în punctul $x = 0$.

2) Pe $R - \{0\}$, f este derivabilă. Avem

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\, 2^{\frac{1}{x}} \ln 2, \quad x \in R - \{0\};$$

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = -\ln 2 \cdot \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} 2^{\frac{1}{x}} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = -\ln 2 \cdot \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^2} 2^{\frac{1}{x}} = 0, \text{ deoarece } \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^2} 2^{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{u\to-\infty} u^2 2^u = \lim_{u\to\infty} \frac{u^2}{2^u} = \lim_{u\to\infty} \frac{2u}{2^u \ln 2} = \lim_{u\to\infty} \frac{2}{2^u \ln^2 2} = 0.$$

Am obținut $f'(0-) = 0$, $f'(0+) = -\infty$.

8. Se dă funcția

$$f(x) = \ln(1 + |x|) \qquad x \in [-1, +1].$$

1) Să se arate că nu satisface condițiile teoremei lui Rolle.

2) Să se arate că are un extremum în intervalul $(-1, +1)$, iar în punctul de extremum derivata nu se anulează.

R. 1) Conform teoremei lui Rolle trebuie ca

a) $$f(-1) = f(+1),$$

și această condiție este satisfăcută deoarece $f(-1) = \ln 2$, $f(+1) = \ln 2$.

b) funcția $f(x)$ trebuie să fie continuă pe $[-1, +1]$. Avem

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0, \\ \ln(1-x), & x \in [-1, 0), \end{cases}$$

deoarece $\ln(1+x)$ este continuă pe $(0, 1]$ și $\ln(1-x)$ este de asemenea continuă pe $[-1, 0)$ rămîne să mai cercetăm în punctul $x = 0$. Avem $f(0+) = \ln 1 = 0$, $f(0-) = \ln 1 = 0$ deci f este continuă pe $[-1, +1]$.

c) funcția $f(x)$ să fie derivabilă pe $(-1, +1)$. Observăm că $\ln(1+x)$ și $\ln(1-x)$ sînt derivabile pe intervalele pe care sînt definite. Rămîne să mai cercetăm punctul $x = 0$. În acest punct funcția fiind continuă nu avem de calculat decît derivatele la dreapta și la stînga.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x \in (0, 1),$$

și

$$f'(0+) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x}, \quad x \in (-1, 0),$$

și

$$f'(0-) = -1;$$

prin urmare f nu are derivata în acest punct, deci f nu îndeplinește pe $(-1, +1)$ condițiile teoremei lui Rolle. Se observă că $f'(x) \neq 0$ pe $(-1, +1)$.

2) Avem

$$f(x) \geqslant f(0),$$

pentru orice $x \in [-1, +1]$ deci pentru $x = 0$, $f(x)$ are un minim. Conform figurii 1 se vede că în $x = 0$ graficul are un punct unghiular, cu semitangentele $y = x$, $x \geqslant 0$ și $y = -x$, $x \leqslant 0$. Cele două semitangente au ecuația $y = |x|$, $x \in R$.

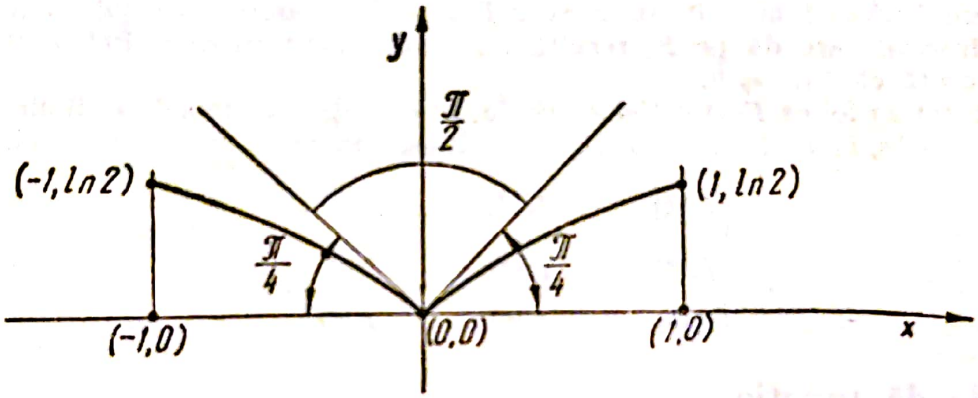


Fig. 1

9. Se dau funcțiile

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad f_3(x),$$

continue pe $[a, b]$ și derivabile pe (a, b). Să se arate că există un punct $\xi \in (a, b)$ astfel încît

$$\begin{vmatrix} f_1'(\xi) & f_2'(\xi) & f_3'(\xi) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix} = 0.$$

R. Considerăm funcția $F(x)$ definită pe $[a, b]$ de

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix}.$$

Funcția $F(x)$ îndeplinește pe $[a, b]$ condițiile teoremei lui Rolle. În adevăr
a) funcția $F(x)$ este continuă pe $[a, b]$ deoarece putem scrie

$$(\alpha) \qquad F(x) = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + A_3 f_3(x), \quad x \in [a, b]$$

unde A_1, A_2, A_3 sînt numerele

$$A_1 = \begin{vmatrix} f_2(a) & f_3(a) \\ f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} f_3(a) & f_1(a) \\ f_3(b) & f_1(b) \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} f_1(a) & f_2(a) \\ f_1(b) & f_2(b) \end{vmatrix}$$

și suma a trei funcții continue, înmulțite cu factori numerici, este tot o funcție continuă;

b) folosind expresia (α) a lui $F(x)$ deducem că F este și derivabilă pe (a, b) și derivata ei este

$F'(x) = A_1 f_1'(x) + A_2 f_2'(x) + A_3 f_3'(x)$, $x \in (a, b)$ sau folosind expresiile lui A_1, A_2 și A_3

$$(\beta) \qquad F'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix};$$

c) avem $F(a) = F(b) = 0$. În adevăr $F(a) = 0$ deoarece dacă înlocuim pe x cu a în determinantul care dă pe F, rezultă un determinant cu două linii egale, deci nul. La fel se arată că $F(b) = 0$.

Am arătat astfel că $F(x)$ satisface pe $[a, b]$ condițiile teoremei lui Rolle deci există un punct $\xi \in (a, b)$ astfel încît $F'(\xi) = 0$. Înlocuind pe x cu ξ, în (β) obținem

$$\begin{vmatrix} f_1'(\xi) & f_2'(\xi) & f_3'(\xi) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix} = 0.$$

10. Se dă funcția

$$f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 60x - 72 \ln|x| + 1, \; x \neq 0,$$

și se cere să se determine cu ajutorul teoremei lui Rolle numărul rădăcinilor reale cît și intervalele în care se găsesc.

R. Trebuie să discutăm separat pe $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$. Pe $(-\infty, 0)$ avem

$$f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 60x - 72 \ln(-x) + 1,$$

$$f'(x) = 12x^3 - 60x^2 + 60x + 60 - \frac{72}{x}, \qquad (\alpha)$$

deci $f'(x) = 0$ conduce la

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0,$$

care are rădăcinile

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

Pe $(-\infty, 0)$, $f'(x) = 0$ numai pentru $x = -1$.

Scanned with OKEN Scanner

Formăm şirul lui Rolle

$f(-\infty)$	$f(-1)$	$f(0-)$
$+$	-6	$+$

Ecuaţia $f(x) = 0$ are două rădăcini reale negative

$$\xi_1 < -1 \quad \text{şi} \quad \xi_2 \in (-1, 0).$$

Pe $(0, +\infty)$, $f'(x)$ este dată tot de (α) deci

$$f'(x) = 0 \text{ pentru } x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

Avem

$$f(1) = 3 - 20 + 30 + 60 + 1 = 74 > 0,$$

$$f(2) = 48 - 160 + 120 + 120 - 72 \ln 2 + 1 = 129 - 72 \ln 2,$$

însă $\ln 2 = \lg 2 \cdot \ln 10 = 0{,}30103 \cdot 2{,}30258 \cong 0{,}693$, deci

$$f(2) = 129 - 72 \cdot 0{,}693 > 0,$$

$$f(3) = 243 - 540 + 270 + 180 - 72 \ln 3 + 1,$$

$$f(3) = 154 - 72 \cdot 0{,}47712 \cdot 2{,}30 \cdot 258 > 0.$$

Formăm şirul lui Rolle

$f(0+)$	$f(+1)$	$f(+2)$	$f(+3)$	$f(+\infty)$
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Ecuaţia $f(x) = 0$ nu are nici o rădăcină reală pozitivă.

11. Se dă funcţia

$$f(x) = \ln(1 + hx), \quad h > 0, \; x \in \left(-\frac{1}{h}, +\infty\right).$$

1) Să se arate că punctul ξ pentru care este satisfăcută formula lui Lagrange

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi),$$

este unic.

2) Să se determine ξ.

R. Pe orice interval $[a, b] \subset \left(-\frac{1}{h}, +\infty\right)$ funcţia $\ln(1 + hx)$ satisface condiţiile din teorema lui Lagrange.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $a \neq b$, avem

$$\ln(1 + hb) - \ln(1 + ha) = (b - a) \cdot \frac{h}{1 + \xi h},$$

sau

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{h(b-a)} \ln \frac{1 + hb}{1 + ha} = \frac{1}{1 + \xi h}.$$

Ecuația (α) are o soluție unică. În adevăr această ecuație este de forma

$$1 + \xi h = c,$$

care admite evident o singură soluție. Deoarece

$$\frac{1}{h(b-a)} \ln \frac{1 + hb}{1 + ha} > 0, \quad b \neq a,$$

rezultă $1 + \xi h > 0$, $\xi > -\frac{1}{h}$.

2) Din (α) obținem imediat

$$\xi = \frac{1}{h}\left[\frac{h(b-a)}{\ln \frac{1 + hb}{1 + ha}} - 1\right].$$

12. Fie $f(x)$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b), care se anulează în a și b și numai în aceste două puncte.

Să se arate că pentru orice $k \in R$, există $\xi \in (a, b)$ astfel încît

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = k.$$

R. Funcția

$$g(x) = e^{-kx} f(x), \quad x \in [a, b],$$

îndeplinește condițiile teoremei lui Rolle pe $[a, b]$ deoarece $e^{-kx} f(x)$ este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și $g(a) = g(b) = 0$. Avem

$$g'(x) = -ke^{-kx} f(x) + e^{-kx} f'(x)$$

și conform teoremei lui Rolle există $\xi \in (a, b)$ astfel încît $g'(\xi) = 0$, sau

$$e^{-k\xi}[-kf(\xi) + f'(\xi)] = 0,$$

sau

$$-kf(\xi) + f'(\xi) = 0;$$

deoarece $f(\xi) \neq 0$, $\xi \in (a, b)$, putem împărți cu $f(\xi)$ și obținem

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = k.$$

Scanned with OKEN Scanner

13. Se dă funcţia

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x^2}{1+x^2}}, & x > 0, \\ 1, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

şi se cere:

1) să se arate că este continuă apoi că este derivabilă în origine;

2) să se calculeze derivatele de ordinul doi la dreapta şi la stînga în origine;

3) să se arate că derivata lui $f(x)$ este mărginită pe R.

R. 1) Trebuie să calculăm $f(x+0)$ pentru a stabili dacă este continuă în origine

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{x^2}{1+x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^2}{1+x^2}} = e^0 = 1;$$

avem $f(0+) = f(0-) = 1$, deci f este continuă în origine.

Deoarece f este continuă în $x = 0$ şi derivata la stînga este zero, $f'(0-) = 0$, rămîne să calculăm derivata lui $f(x)$ pentru $x > 0$, apoi să determinăm pe $f'(0+)$.

Avem

$$f'(x) = \frac{2x(1+x^2) - 2x \cdot x^2}{(1+x^2)^2} e^{\frac{x^2}{1+x^2}}, \quad x > 0,$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} e^{\frac{x^2}{1+x^2}}, \quad x > 0,$$

şi se obţine imediat că $f'(0+) = 0$, deci f este derivabilă în punctul $x = 0$ şi derivata are valoarea zero.

2) Observăm că derivata de ordinul doi la stînga în punctul $x = 0$ este zero. Rămîne să mai calculăm derivata la dreapta.

Avem

$$f''(x) = \left[\frac{2(1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^3} + \frac{4x^2}{(1+x^2)^4}\right] e^{\frac{x^2}{1+x^2}}, \quad x > 0,$$

deci

$$f''(0+) = 2.$$

Funcţia f nu admite derivata de ordinul doi în punctul $x = 0$.

3) Avem

$$f'(x) = 0, \qquad x \leqslant 0,$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} e^{\frac{x^2}{1+x^2}}, \quad x \geqslant 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a arăta că f are derivata mărginită pe R este suficient a arăta că $f'(x)$, $x \geqslant 0$ este mărginită. Avem

$$\frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1, \quad \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1, \quad \frac{x^2}{1+x^2} \leqslant 1, \quad x \in R_+,$$

deci

$$f'(x) \leqslant e, \quad x \geqslant 0.$$

14. Se dă funcţia

$$f(x) = e^{|x|}, \quad x \in [-1, +1].$$

1) Funcţia este continuă pe $[-1, +1]$, ia valori egale la capete, are un extremum în interval, şi totuşi derivata nu se anulează în $(-1, +1)$. Să se explice acest rezultat.

2) Se dă funcţia

$$g(x) = e^{x^2}, \quad x \in [-1, +1].$$

g este continuă pe $[-1, +1]$, ia valori egale la capete, are un extremum în interval iar derivata se anulează în $(-1, +1)$. Să se explice şi acest rezultat.

R. Enunţul teoremei lui Rolle este următorul: fie $f(x)$ o funcţie definită pe $[a, b]$. Dacă

1') funcţia este continuă pe $[a, b]$,

2') este derivabilă pe (a, b),

3') $f(b) = f(a)$,

atunci există un punct $c \in (a, b)$ în care $f'(c) = 0$.

1) Funcţia

$$f(x) = e^{|x|}, \qquad x \in [-1, +1],$$

este continuă pe $[-1, +1]$ şi $f(-1) = f(+1) = e$; rămîne să mai cercetăm dacă este derivabilă pe $(-1, +1)$. Avem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in (-1, 0), \\ 1, & x = 0, \\ e^{x}, & x \in (0, +1). \end{cases}$$

Funcţia nu este derivabilă cel mult în punctul $x = 0$; în acest punct, fiind continuă, să calculăm derivatele la dreapta şi la stînga; avem

$$f'(x) = -e^{-x}, \qquad x \in (-1, 0), \qquad \text{deci } f'(0-) = -1,$$

$$f'(x) = e^{x}, \qquad x \in (0, 1), \qquad \text{deci } f'(0+) = +1,$$

prin urmare f nu are derivata în $x = 0$. În acest punct funcţia are un minim deoarece

$$e^0 = 1 \leqslant e^{|x|}, \qquad x \in [-1, +1].$$

Conform figurii 2, graficul are în $x=0$, $y=1$ un punct unghiular.

Scanned with OKEN Scanner

2) Funcția $g(x) = e^{x^2}$, $x \in [-1, +1]$, îndeplinește toate condițiile teoremei lui Rolle, este continuă pe $[-1, +1]$, are derivata în fiecare punct al lui $(-1, +1)$, deoarece e^{x^2} este derivabilă pe $(-1, +1)$ și $g(-1) = g(+1) = e$, deci există un punct în $(-1, +1)$ în care $g'(x)$ se anulează. Avem

$$g'(x) = 2xe^{x^2}, \qquad x \in (-1, +1),$$

și $g'(x) = 0$ pentru $x = 0$; în acest punct graficul lui $g(x)$, (fig. 3), are un minim.

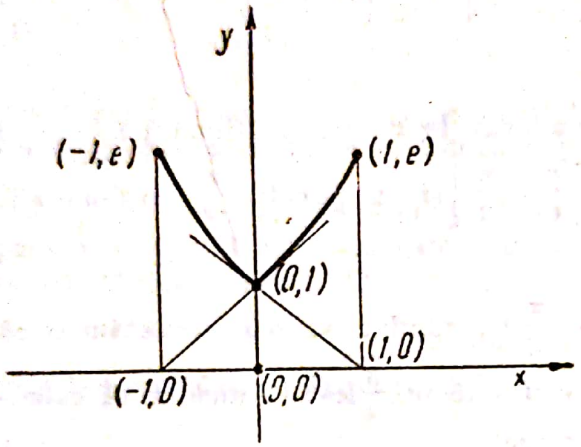


Fig. 2

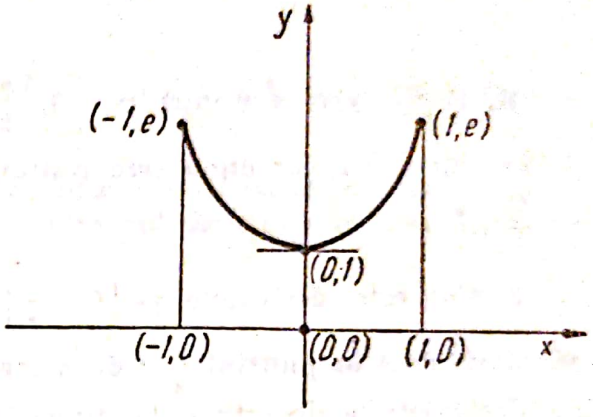


Fig. 3

15. Aplicînd teorema lui Rolle funcției

$$f(x) = (ax + b)^m (cx + d)^n, \quad m > 1, \quad n > 1, \quad x \in R,$$

să se demonstreze că $\dfrac{mad + nbc}{ac(m + n)}$ este cuprins între $\dfrac{b}{a}$ și $\dfrac{d}{c}$.

R. Funcția este derivabilă pe R. Avem

$$f'(x) = ma(ax + b)^{m-1}(cx + d)^n + nc(ax + b)^m(cx + d)^{n-1},$$

sau

$$f'(x) = (ax + b)^{m-1}(cx + d)^{n-1}[(mac + nca)\,x + mad + ncb],$$

$$f'(x) = 0, \; x_1 = -\frac{b}{a}, \; x_2 = -\frac{d}{c}, \; x_3 = -\frac{mad + nbc}{ac(m + n)}.$$

Funcția f se anulează în punctele $x_1 = -\dfrac{b}{a}$, $x_2 = -\dfrac{d}{c}$. Conform teoremei lui Rolle există un punct ξ în intervalul deschis format de x_1 și x_2 pentru care $f'(\xi) = 0$.

Derivata f' se anulează în punctele x_1 și x_2 însă x_1, x_2 nu aparțin intervalului considerat. Rămîne că x_3 se găsește în acest interval. Avem deci

$$\frac{b}{a} < \frac{mad + nbc}{ac(m + n)} < \frac{d}{c} \text{ sau } \frac{d}{c} < \frac{mad + nbc}{ac(m + n)} < \frac{b}{a},$$

după cum

$$\frac{b}{a} < \frac{d}{c} \text{ sau } \frac{d}{c} < \frac{b}{a}.$$

16. Să se studieze valabilitatea condițiilor teoremei lui Rolle pentru funcția

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right), \\ \operatorname{ctg} x, & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

R. 1) $f(x)$ este continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; în adevăr $\operatorname{tg} x$ este continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ și $\lim_{x \to \frac{\pi}{4} - 0} \operatorname{tg} x = 1$, iar $\operatorname{ctg} x$ este continuă pe $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ și în punctul $\frac{\pi}{4}$ ia valoarea 1.

2) $f(x)$ este derivabilă pe $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$; rămîne să mai cercetăm dacă este derivabilă în punctul $\frac{\pi}{4}$; deoarece f este continuă în $\frac{\pi}{4}$ este suficient să calculăm derivatele la dreapta și la stînga în acest punct.

Avem

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right),$$

deci

$$f'\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 2;$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right],$$

deci $f'\left(\frac{\pi}{4} + 0\right) = -2$;

funcția f nu este derivabilă în punctul $\frac{\pi}{4}$.

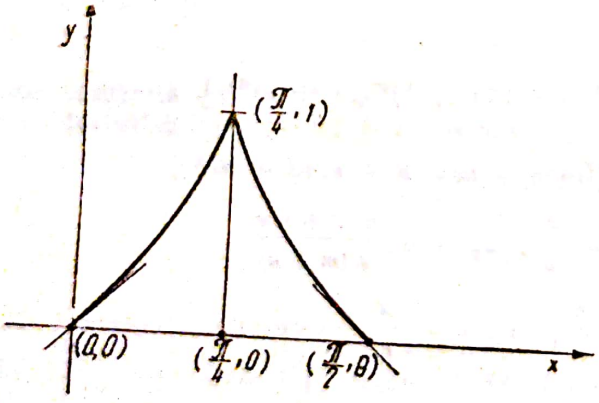


Fig. 4

3) $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

deci $f(x)$ ia valori egale la capete. Condiția (2) nefiind satisfăcută urmează că $f(x)$ nu satisface teorema lui Rolle pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; în adevăr derivata $f'(x)$ nu se anulează în nici un punct $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Graficul funcției $f(x)$ este dat în figura 4.

Scanned with OKEN Scanner

17. Se dă funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0, 1), \\ x^3 + 2, & x \in (1, 2], \\ 3, & x = 1, \end{cases}$$

şi să se cerceteze dacă i se poate aplica formula creşterilor finite pe $[0, 2]$.

R. a) $f(x)$ este continuă pe $[0, 1) \cup (1, 2]$. În punctul $x = 1$, avem $f(1 - 0) = 3$, $f(1 + 0) = 3$, deci $f(x)$ este continuă pe $[0, 2]$.

b) $f(x)$ este derivabilă pe $[0, 1) \cup (1, 2]$. Deoarece este continuă în punctul $x = 1$, pentru a stabili derivabilitatea în acest punct este suficient să calculăm derivatele la dreapta şi la stînga în $x = 1$;

$$f'(1 - 0) = 3, \qquad f'(1 + 0) = 3x^2|_1 = 3,$$

deci $f(x)$ este derivabilă pe $[0, 2]$. Se poate aplica funcţiei $f(x)$ formula creşterilor finite.

Avem:

$$f(2) - f(0) = 2f'(c),$$

sau

$$10 = 2f'(c), \qquad (\alpha)$$

se observă că $c \in (1, 2)$ deoarece pentru $c \in (0, 1)$ $f'(c) = 3$ şi relaţia (α) este imposibilă. Cu $c \in (1, 2)$ avem:

$$10 = 2 \cdot 3c^2, \qquad c = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

18. Folosind formula creşterilor finite să se arate că:

$$\frac{b-a}{\sin^2 b} < \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b < \frac{b-a}{\sin^2 a}, \text{ dacă } [a, b] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right), a < b,$$

$$\frac{b-a}{\sin^2 a} < \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b < \frac{b-a}{\sin^2 b}, \text{ dacă } [a, b] \subset \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), a < b.$$

R. Funcţia $\operatorname{ctg} x$ este continuă şi derivabilă pe orice interval $[a, b] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ deci îi putem aplica formula creşterilor finite $\operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} a = (b - a) \frac{-1}{\sin^2 \xi}$, $\xi \in (a, b)$, $a < b$; însă $\sin^2 a < \sin^2 \xi < \sin^2 b$ deci $\frac{1}{\sin^2 b} < \frac{1}{\sin^2 \xi} < \frac{1}{\sin^2 a}$ dacă $[a, b] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, de unde rezultă imediat

$$\frac{b-a}{\sin^2 b} < \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b < \frac{b-a}{\sin^2 a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a < b$ și $[a, b] \subset \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ atunci

$$\sin^2 b < \sin^2 \xi < \sin^2 a, \text{ sau}$$

$$\frac{1}{\sin^2 a} < \frac{1}{\sin^2 \xi} < \frac{1}{\sin^2 b},$$

deci

$$\frac{b-a}{\sin^2 a} < \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b < \frac{b-a}{\sin^2 b}.$$

19. Se dă funcția

$$f(x) = e^x, \quad x \in R.$$

1) Să se arate că punctul ξ pentru care este satisfăcută formula creșterilor finite

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi),$$

este unic.

2) Să se determine ξ.

R. 1) Funcția $f(x) = e^x$ pentru orice $[a, b] \subset R$, este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) deci îi putem aplica teorema lui Lagrange. Pentru $a \neq b$ avem

$$(\alpha) \qquad e^b - e^a = (b - a)e^\xi.$$

Ecuația $e^\xi = \frac{e^b - e^a}{b - a}$ are o soluție reală și numai una. În adevăr graficele funcțiilor $y = e^x$ și $y = \lambda$ (fig. 5) se intersectează pentru orice $\lambda > 0$, numai într-un singur punct.

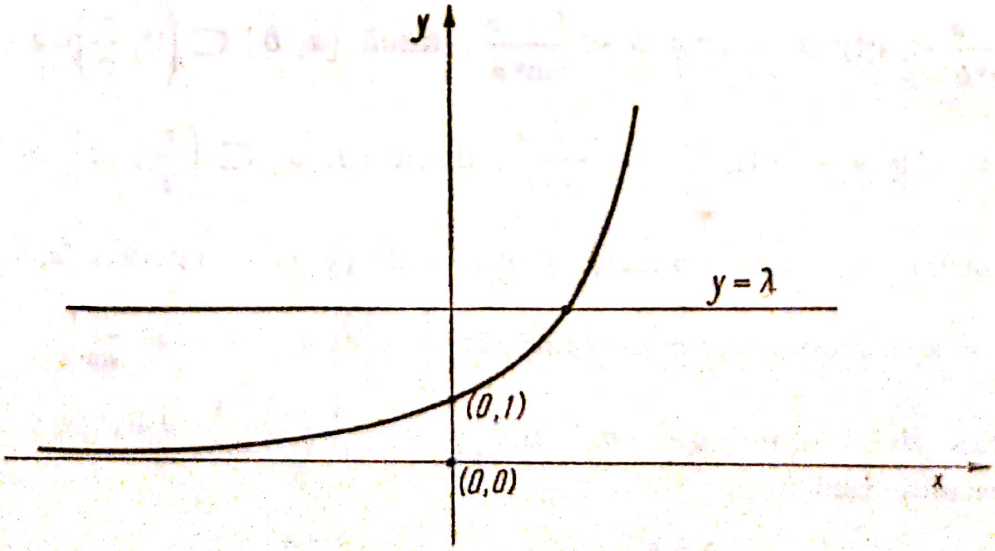


Fig. 5

Scanned with OKEN Scanner

2) Deoarece $\frac{e^b - e^a}{b-a} > 0$ pentru $b \neq a$ obținem imediat din (α) soluția

$$\xi = \ln \frac{e^b - e^a}{b-a}.$$

20. Se dă ecuația

$$x^3 - (1 + a + 4a^4)\, x^2 + a\,(1 + 4a^3 + 4a^4)x - 4a^5 = 0$$

unde a este un parametru. Se cere:

1) să se rezolve ecuația;

2) dacă $a > 1$ și $x_1 < x_2 < x_3$ sînt rădăcinile ecuației date să se determine valorile lui a pentru care numerele

$$x_1,\ 3x_2,\ x_3$$

în această ordine sînt în progresie geometrică;

3) să se determine a astfel încît numerele

$$ax_2,\ x_1,\ x_3,$$

în această ordine să formeze o progresie aritmetică cu termeni reali și rație reală;

4) să se discute cu teorema lui Rolle numărul valorilor reale ale lui a pentru care

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = x_1x_2x_3 + 2a + 1.$$

R. 1) $f(-1) = -1 - (1 + a + 4a^4) - a(1 + 4a^3 + 4a^4) - 4a^5 \neq 0,$

$$f(+1) = 1 - (1 + a + 4a^4) + a(1 + 4a^3 + 4a^4) - 4a^5 = 0,$$

deci $x_1 = 1$ este o rădăcină a ecuației date. Împărțind cu $x - 1$ obținem

$$x^3 - (1 + a + 4a^4)x^2 + a(1 + 4a^3 + 4a^4)x - 4a^5 =$$

$$= (x - 1)\,[x^2 - (a + 4a^4)\,x + 4a^5]$$

deci ecuația mai admite rădăcinile $x_2 = a,\ x_3 = 4a^4$.

2) Pentru $a > 1$ avem

$$1 < a < 4a^4 \text{ deci } x_1 < x_2 < x_3$$

și dacă $x_1,\ 3x_2,\ x_3$ formează progresie geometrică trebuie să avem

$$\frac{x_1}{3x_2} = \frac{3x_2}{x_3} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{3a} = \frac{3a}{4a^4},$$

care conduce la ecuația

Scanned with OKEN Scanner

$4a^4 = 9a^2$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = -\frac{3}{2}$ și pentru că $a > 1$, rezultă unica soluție $a = \frac{3}{2}$; obținem astfel progresia geometrică

$$1, \frac{9}{2}, \frac{81}{4},$$

cu rația $\frac{9}{2}$.

3) Numerele

$$ax_2, x_1, x_3,$$

sau

$$a^2, 1, 4a^4,$$

formează o progresie aritmetică dacă

$$2x_2 = ax_2 + x_3 \quad \text{sau} \quad 2 = a^2 + 4a^4.$$

Ecuația $4a^4 + a^2 - 2 = 0$ are rădăcinile

$$a_1 = +\sqrt{\frac{-1+\sqrt{33}}{8}}, \qquad a_2 = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{33}}{8}},$$

$$a_3 = +\sqrt{\frac{-1-\sqrt{33}}{8}}, \qquad a_4 = -\sqrt{\frac{-1-\sqrt{33}}{8}}.$$

Obținem următoarele progresii aritmetice: pentru a_1 și a_2 pe

$$\frac{-1+\sqrt{33}}{8}, \quad 1, \quad \frac{17-\sqrt{33}}{8},$$

cu rația $r = \frac{9-\sqrt{33}}{8}$;

pentru a_3 și a_4

$$\frac{-1-\sqrt{33}}{8}, \quad 1, \quad \frac{17+\sqrt{33}}{8},$$

cu rația $r' = \frac{9+\sqrt{33}}{8}$.

În ultimul caz deși a nu este real, progresia obținută are termenii reali și rația este reală.

4) Avem

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a(1 + 4a^3 + 4a^4),$$

$$x_1x_2x_3 = 4a^5,$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem astfel ecuația

$$a(1 + 4a^3 + 4a^4) = 4a^5 + 2a + 1,$$

sau

$$f(a) = 4a^4 - a - 1 = 0,$$

$f'(a) = 16a^3 - 1 = 0, \quad a = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$.

Formăm șirul lui Rolle

$$\begin{array}{ccccc} f(-\infty) & & f\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right) & & f(+\infty) \\ + & & - & & + \end{array},$$

deoarece

$$f\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{8\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - 1 < 0.$$

Ecuația $f(a) = 0$ are două rădăcini reale

$$x_1 > \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \text{ și } x_2 < 0 \text{ pentru că } f(0) < 0.$$

Fără punctul 4 — 1969, Institutul Politehnic București.

21. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{a_1} + x^{a_2} + \ldots + x^{a_n} - n}{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}, \quad a_k > 0, \quad a_k \neq 1.$$

R. Nedeterminarea este de forma $\frac{0}{0}$. Aplicăm regula lui l'Hospital. Avem

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{a_1} + x^{a_2} + \ldots + x^{a_n} - n}{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x - a_1 - a_2 - \ldots - a_n} = \lim_{x \to 1} \frac{a_1 x^{a_1 - 1} + a_2 x^{a_2 - 1} + \ldots + a_n x^{a_n - 1}}{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \ldots + a_n^x \ln a_n} =$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + \ldots + a_n \ln a_n};$$

pentru $a_k > 0$, $a_k \neq 1$.

22. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n} \right]^{\frac{1}{\sin x}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Nedeterminarea este de forma 1^{∞}. Notăm

$$A(x) = \left[\frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{\sin x}}$$

şi calculăm

$$\lim_{x \to 0} \ln A(x)$$

la care nedeterminarea este de forma $\frac{0}{0}$. Obţinem

$$\ln A(x) = \frac{1}{\sin x} \ln \frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n}$$

şi aplicăm regula lui l'Hospital. Avem

$$\lim_{x \to 0} \ln A(x) = \lim_{x \to 0} \frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \ldots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n}{n} = \ln (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}},$$

de unde rezultă imediat

$$\lim_{x \to 0} A(x) = e^{\ln (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n}.$$

23. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} (p^{x-1} + p^{2x-1} + \ldots + p^{px-1})^{\operatorname{ctg} x}.$$

R. Nedeterminarea este de forma 1^{∞}. Notăm

$$A(x) = (p^{x-1} + p^{2x-1} + \ldots + p^{px-1})^{\operatorname{ctg} x}$$

şi calculăm

$$\lim_{x \to 0} \ln A(x)$$

care este de forma $\frac{0}{0}$ dacă înlocuim pe ctg x cu $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Avem

$$\ln A(x) = \frac{\ln (p^{x-1} + p^{2x-1} + \ldots + p^{px-1})}{\operatorname{tg} x},$$

deci

$$\lim_{x\to 0} \ln A(x) = \lim_{x\to 0} \frac{p^{x-1}\ln p + 2p^{2x-1}\ln p + \ldots + pp^{px-1}\ln p}{p^{x-1} + p^{2x-1} + \ldots + p^{px-1}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{p}(1 + 2 + \ldots + p)\ln p = \frac{p+1}{2}\ln p,$$

deci

$$\lim_{x\to 0} A(x) = e^{\ln\left(p^{\frac{p+1}{2}}\right)} = p^{\frac{p+1}{2}}$$

24. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0} \frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_p^x - p}{b_1^x + b_2^x + \ldots + b_q^x - q},$$

unde

$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad a_i \neq 1, \quad b_i \neq 1.$$

R. Cînd $x \to 0$ obținem o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Aplicăm regula lui l'Hospital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_p^x - p}{b_1^x + b_2^x + \ldots + b_p^x - q} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \ldots + a_p^x \ln a_p}{b_1^x \ln b_1 + b_2^x \ln b_2 + \ldots + b_q^x \ln b_q} =$$

$$= \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_p}{\ln b_1 + \ln b_2 + \ldots + \ln b_q} = \frac{\ln(a_1 a_2 \ldots a_p)}{\ln(b_1 b_2 \ldots b_q)},$$

dacă $b_1 b_2 \ldots b_q \neq 1$.

Dacă $b_1 b_2 \ldots b_q = a_1 a_2 \ldots a_p = 1$, obținem tot o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$ și mai aplicăm odată regula lui l'Hospital. Dacă notăm cu L limita din enunț rezultă în acest caz că

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{a_1^x \ln^2 a_1 + a_2^x \ln^2 a_2 + \ldots + a_p^x \ln^2 a_p}{b_1^x \ln^2 b_1 + b_2^x \ln^2 b_2 \ldots + b_q^x \ln^2 b_q},$$

deci

$$L = \frac{\ln^2 a_1 + \ln^2 a_2 + \ldots + \ln^2 a_p}{\ln^2 b_1 + \ln^2 b_2 + \ldots + \ln^2 b_q}.$$

Scanned with OKEN Scanner

25. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx)^{\frac{1}{x}}.$$

R. Nedeterminarea este de forma 1^{∞}. Notăm

$$A(x)=1+\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx;$$

avem de calculat $\lim_{x\to 0}[A(x)]^{\frac{1}{x}}$. În această situaţie, pentru a aduce nedeterminarea la forma $\frac{0}{0}$ procedăm astfel: scriem

$$B(x)=\ln[A(x)]^{\frac{1}{x}}=\frac{\ln A(x)}{x}$$

şi calculăm

$$\lim_{x\to 0}B(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln A(x)}{x}$$

care este de forma $\frac{0}{0}$. Avem, aplicînd regula lui l'Hospital

$$\lim_{x\to 0}B(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+2\cos 2x+\ldots+n\cos nx}{1+\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx}=\frac{1}{2}n(n+1).$$

Am obţinut

$$\lim_{x\to 0}B(x)=\frac{1}{2}n(n+1),$$

deci

$$\lim_{x\to 0}[A(x)]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{2}n(n+1)}.$$

26. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0}[\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ldots+\ln(1+px)]^{x}.$$

R. Nedeterminarea este de forma 0°. Notăm

$$A(x)=\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ldots+\ln(1+px)$$

Scanned with OKEN Scanner

și calculăm

$$\lim_{x\to 0} B(x) = \lim_{x\to 0} \ln\,[A(x)]^x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln A(x)}{\frac{1}{x}}$$

care este de forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicăm regula lui l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} B(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+2x} + \ldots + \frac{p}{1+px}}{-\frac{1}{x^2}\,[\ln(1+x) + \ln(1+2x) + \ldots + \ln(1+px)]}.$$

numărătorul are limita $1 + 2 + \ldots + p = \frac{1}{2}p(p+1)$; rămîne să ne ocupăm de limita numitorului care este de forma $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1+2x) + \ldots + \ln(1+px)}{-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+2x} + \ldots + \frac{p}{1+px}}{-2x} = \begin{cases} -\infty, \\ +\infty, \end{cases}$$

după cum $x \to 0+$ sau $x \to 0-$; în ambele cazuri însă

$$\lim_{x\to 0} B(x) = 0$$

deci $\lim\limits_{x\to 0} [\ln(1+x) + \ln(1+2x) + \ldots + \ln(1+px)]^x = 1.$

27. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x + 2\operatorname{ctg} 2x + \ldots + n\operatorname{ctg} nx - \frac{n}{x}\right).$$

R. Nedeterminarea este de formă $\infty - \infty$. Procedăm în modul următor:

$$\operatorname{ctg} x + 2\operatorname{ctg} 2x + \ldots + n\operatorname{ctg} nx - \frac{n}{x} =$$

$$= \frac{x\operatorname{ctg} x + 2x\operatorname{ctg} 2x + \ldots + nx\operatorname{ctg} nx - n}{x}, \qquad (\alpha).$$

Au apărut limitele

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg} kx = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} kx}$$

care sînt de forma $\frac{0}{0}$. Aplicăm regula lui l'Hospital şi avem

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{ctg} kx = \lim_{x\to 0} \frac{1}{k} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 kx}} = \frac{1}{k},$$

deci cînd $x \to 0$, (α) conduce la o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$ şi putem aplica regula lui l'Hospital. Avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{ctg} x + 2x \operatorname{ctg} 2x + \ldots + nx \operatorname{ctg} nx - n}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} k \operatorname{ctg} kx - x \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sin^2 kx}}{1},$$

care este de forma $\infty - \infty$. Putem scrie însă

$$\lim_{x\to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} k \operatorname{ctg} kx - x \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sin^2 kx} \right) = \sum_{k=1}^{n} k \left(\operatorname{ctg} kx - \frac{kx}{\sin^2 kx} \right)$$

şi ne ocupăm de limita fiecărui termen din sumă

$$\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} kx - \frac{kx}{\sin^2 kx} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos kx \sin kx - kx}{\sin^2 kx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-k \sin^2 kx + k \cos^2 kx - k}{2k \sin kx \cos kx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2k^2 \sin kx \cos kx - 2k^2 \sin kx \cos kx}{2k^2 \cos^2 kx - 2k^2 \sin^2 kx} = 0.$$

Rezultă că limita din enunţ are valoarea 0.

28. Să se calculeze

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 6}{x \sin x + 2 \cos x - 2}.$$

R. Nedeterminarea este de forma $\frac{0}{0}$. Aplicăm regula lui l'Hospital:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{6e^x - 3x^2 - 6x - 6}{\sin x + x \cos x - 2 \sin x};$$

am obţinut tot o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Mai aplicăm odată regula lui l'Hospital:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{6e^x - 6x - 6}{\cos x - x \sin x - \cos x};$$

Scanned with OKEN Scanner

este tot o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Mai aplicăm odată regula lui l'Hospital:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{6e^x - 6}{-x\cos x - \sin x};$$

cînd $x \to 0$ avem tot o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Mai aplicăm odată regula lui l'Hospital

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{6e^x}{+x\sin x - \cos x - \cos x} = -3.$$

După cum se vede, pentru înlăturarea nedeterminării a fost necesar să aplicăm de 4 ori regula lui l'Hospital.

29. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} 2x + \ldots + \operatorname{Arctg} nx}{\ln(1+x) + \ln(1+2x) + \ldots + \ln(1+px)}.$$

R. Prin Arctg x se înțelege determinarea principală a lui arctg x deci Arctg $0 = 0$. Nedeterminarea este de forma $\frac{0}{0}$. Putem aplica regula lui l'Hospital, deoarece atît numărătorul cît și numitorul sînt derivabili într-o vecinătate a lui $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} 2x + \ldots + \operatorname{Arctg} nx}{\ln(1+x) + \ln(1+2x) + \ldots + \ln(1+px)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{1+4x^2} + \ldots + \frac{n}{1+n^2x^2}}{\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+2x} + \ldots + \frac{p}{1+px}} = \frac{1+2+\ldots+n}{1+2+\ldots+p} = \frac{n(n+1)}{p(p+1)},$$

deoarece $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$.

30. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \sin 2^2 x + \ldots + \sin n^2 x}{\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} 2x + \ldots + \operatorname{Arcsin} px}.$$

R. Prin Arcsin x se înțelege determinarea principală a lui arcsin x deci Arcsin $0 = 0$. Nedeterminarea este de forma $\frac{0}{0}$. Putem aplica regula lui l'Hospital din cauză că numărătorul și numitorul sînt derivabili într-o vecinătate a lui $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \sin 2^2 x + \ldots + \sin n^2 x}{\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} 2x + \ldots + \operatorname{Arcsin} px} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 2^2 \cos 2^2 x + \ldots + n^2 \cos n^2 x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} + \ldots + \frac{p}{\sqrt{1-p^2x^2}}} =$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{1+2+\ldots+p} = \frac{1}{3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{p(p+1)},$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

31. Să se determine intervalele de strictă monotonie ale funcție

$$f(x) = x^4\, 3^{-x}, \quad x \in R.$$

R. Intervalele de strictă monotonie sînt intervalele pe care derivata întîia păstrează un semn constant. Funcția f este derivabilă pe R. Avem

$$f'(x) = 4x^3 3^{-x} - x^4 3^{-x} \ln 3 = x^3 3^{-x}(4 - x \ln 3);$$

$$f'(x) = 0, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{4}{\ln 3},$$

x	$-\infty$						0					$\frac{4}{\ln 3}$						$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

prin urmare:

$x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ este strict descrescătoare;

$x \in \left(0, \frac{4}{\ln 3}\right)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ este strict crescătoare;

$x \in \left(\frac{4}{\ln 3}, +\infty\right)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ este strict descrescătoare.

32. Se dă

$$f(x) = \operatorname{Arccos} \frac{2x}{1 + x^2}$$

și se cere:

1) să se stabilească mulțimile de definiție, continuitate și derivabilitate;

2) să se calculeze derivata $f'(x)$;

3) pe $(-1, +1)$, $f(x)$ are aceeași derivată cu $g(x) = -2 \operatorname{Arctg} x$; să se explice rezultatul.

R. 1) Prin Arccos se înțelege determinarea principală a funcției arccos. Deoarece

$$-1 \leqslant \frac{2x}{1 + x^2} \leqslant +1, \qquad x \in R,$$

rezultă că mulțimea de definiție este R, care este și mulțimea de continuitate.

Scanned with OKEN Scanner

2) Calculăm derivata lui f. Avem

$$f(x') = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2},$$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{x^2-1}{|x^2-1|}, \quad x \in R - \{-1, +1\},$$

deci

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & x \in (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty), \\ \frac{-2}{1+x^2}, & x \in (-1, +1). \end{cases}$$

Acest rezultat ne arată că mulțimea de derivabilitate este $R - \{-1, +1\}$. În punctele (-1) și $(+1)$, $f(x)$ are derivate la dreapta și la stînga finite, însă diferite:

$$f'(-1-0) = 1, \qquad f'(-1+0) = -1,$$

$$f'(+1-0) = -1, \qquad f'(+1+0) = +1.$$

3) $g(x) = -2 \operatorname{Arctg} x$ este derivabilă pe R deci este derivabilă și pe $(-1, +1)$. Avem

$$g'(x) = \frac{-2}{1+x^2}.$$

Funcțiile f și g avînd aceeași derivată pe $(-1, +1)$ diferă pe acest interval printr-o constantă. În adevăr dacă punem

$$y = 2 \operatorname{Arctg} x, \qquad z = \operatorname{Arccos} \frac{2x}{1+x^2},$$

obținem

$$x = \operatorname{tg} \frac{y}{2}, \quad -\frac{\pi}{4} < \frac{y}{2} < \frac{\pi}{4}; \quad z = \operatorname{Arccos} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{y}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}},$$

sau $z = \operatorname{Arccos}(\sin y)$, $\sin y - \cos z = 0$, $z \in (0, \pi)$,

deci

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin y$, $\frac{\pi}{2} - z = y + 2k\pi$ sau $\frac{\pi}{2} - z = \pi - y + 2k'\pi$; deoarece

$z \in (0, \pi)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă $y + z = \frac{\pi}{2}$.

33. Fie $f(x)$ o funcție strict pozitivă, derivabilă în intervalul $[a-h, a+h]$; folosind formula creșterilor finite să se calculeze

$$\lim_{\eta \to 0} \left[\frac{f(a+\eta)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{\eta}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Nedeterminarea este de forma 1^{∞}. Punem

$$y = \left[\frac{f(a+\eta)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{\eta}},$$

deci

$$\ln y = \frac{1}{\eta}\left[\ln f(a+\eta) - \ln f(a)\right]$$

şi aplicăm formula creşterilor finite funcţiei $\ln f(x)$ pentru intervalul $[a, a+\eta]$; avem

$$\ln f(a+\eta) - \ln f(a) = \eta \frac{f'(a+\theta\eta)}{f(a+\theta\eta)},$$

deci

$$\ln y = \frac{f'(a+\theta\eta)}{f(a+\theta\eta)} \quad \text{şi} \quad \lim_{\eta\to 0} \ln y = \frac{f'(a)}{f(a)};$$

obţinem astfel

$$\lim_{\eta\to 0}\left[\frac{f(a+\eta)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{\eta}} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

34. Se dă

$$f(x) = (\ln x)^{\ln^2 x}.$$

1) Să se determine mulţimile de definiţie, de continuitate şi de derivabilitate.

2) Să se calculeze derivata f'.

R. 1. Funcţia $\ln x$ cere ca $x > 0$. Funcţia exponenţială $(\ln x)^{\ln^2 x}$ cere ca baza să fie pozitivă deci $\ln x > 0$ de unde rezultă $x > 1$. Mulţimea de definiţie este şi mulţime de continuitate şi derivabilitate.

2. Putem scrie

$$f(x) = e^{\ln^2 x \cdot \ln(\ln x)}$$

şi cum $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$, rezultă că avem de calculat derivata funcţiei

$$g(x) = \ln^2 x \ln(\ln x), \qquad x > 1.$$

Avem

$$g'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x \cdot \ln(\ln x) + \ln^2 x \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x},$$

sau

$$g'(x) = \frac{2}{x}\ln x \cdot \ln(\ln x) + \frac{1}{x}\ln x,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde deducem imediat, dacă $x > 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{x}\ln x[\ln(\ln^2 x) + 1]\,(\ln x)^{\ln 2x}$$

35. Să se demonstreze că

$$\operatorname{Arctg} x < \frac{3x+1}{x^2+1} \text{ pentru } x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}\right).$$

R. Considerăm funcţia

$$f(x) = \operatorname{Arctg} x - \frac{3x+1}{x^2+1}, \qquad x \in R,$$

derivabilă pe R.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{3(x^2+1) - 2x(3x+1)}{(x^2+1)^2},$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 2x - 2}{(x^2+1)^2}, \qquad x \in R,$$

$$f'(x) = 0, \qquad 2x^2 + x - 1 = 0, \qquad x_1 = -1, \qquad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Pentru $x \in \left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$, $f'(x) > 0$, deci f este crescătoare pe acest interval. Avem

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\frac{3}{\sqrt{3}} + 1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\pi}{6} - \frac{3\,(3 + \sqrt{3})}{4\sqrt{3}} < 0,$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}+1}{3+1} = \frac{\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}+1}{4} < 0;$$

prin urmare pe $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}\right)$ avem

$$\operatorname{Arctg} x - \frac{3x+1}{x^2+1} < 0 \quad \text{sau} \quad \operatorname{Arctg} x < \frac{3x+1}{x^2+1}.$$

36. Să se arate că dacă $x > 0$, $y > 0$, şi $x + y = a > 0$ atunci

$$x^m y^n \leqslant \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}, \quad m \in N, \quad n \in N.$$

R. Avem $y = a - x$; trebuie să arătăm că funcţia

$$f(x) = x^m(a-x)^n, \qquad x \in [0, a],$$

este mărginită, avînd ca margine superioară pe

$$\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}\, a^{m+n}$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcția f este derivabilă pe $(0, a)$; avem

$$f'(x) = mx^{m-1}(a - x)^n - nx^m(a - x)^{n-1},$$

$$f'(x) = 0,\ x^{m-1}(a - x)^{n-1}(ma - mx - nx) = 0;$$

deci $x_1 = 0,\ x_2 = a,\ x_3 = \frac{ma}{m+n} \in (0, a)$.

Pentru x_1 și x_2, f se anulează și pentru că $f(x) \geqslant 0$ pentru $x \in [0, a]$ rezultă că în punctul x_3, f are un maximum dat de

$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right) = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}.$$

37. Se dă funcția

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + m\left(2 + \frac{1}{x^2}\right),\ x \in R - \{0\},$$

unde m este un parametru real.

1) Să se determine m astfel încît ecuația $f(x) = 0$ să aibă toate rădăcinile reale.

2) Să se determine intervalul de variație al lui m pentru care funcția $f(x)$ admite extreme, apoi să se determine punctele de extremum.

3) Să se deducă din studiul semnului derivatei lui $f(x)$ punctele de maximum sau de minim ale funcției pentru $m = 0$.

1969. Institutul Politehnic, București.

R. 1. Ecuația $f(x) = 0$ se scrie

$$\frac{1}{x^2}(x^4 + 2mx^2 + 1 + m) = 0, \qquad x \neq 0,$$

sau

$$x^4 + 2mx^2 + 1 + m = 0,$$

cu soluțiile

$$x_1 = +\sqrt{-m + \sqrt{m^2 - m - 1}},\ x_2 = -\sqrt{-m + \sqrt{m^2 - m - 1}},$$

$$x_3 = +\sqrt{-m - \sqrt{m^2 - m - 1}},\ x_4 = -\sqrt{-m - \sqrt{m^2 - m - 1}}.$$

Pentru ca ecuația $f(x) = 0$ să aibă toate rădăcinile reale trebuie ca

$$-m + \sqrt{m^2 - m - 1} > 0, \qquad -m - \sqrt{m^2 - m - 1} > 0,$$

însumînd rezultă o condiție necesară ca $m < 0$. Trebuie să avem și $m^2 - m - 1 > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația $m^2 - m - 1 = 0$ are rădăcinile $m_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $m_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ deci $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, +\infty\right)$. Prin urmare pentru

$$m \in \left(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right),$$

rădăcinile x_1 și x_2 sînt reale. Trebuie să avem și

$$-m - \sqrt{m^2 - m - 1} \geqslant 0, \text{ sau } -m \geqslant \sqrt{m^2 - m - 1}$$

și, pentrucă $m < 0$ putem ridica la patrat ceea ce dă

$$m^2 \geqslant m^2 - m - 1 \text{ sau } m \geqslant -1.$$

În final, ecuația are toate rădăcinile reale pentru

$$m \in \left[-1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right].$$

2. Punctele de extremum ale lui $f(x)$ se găsesc pentru valorile care anulează derivata $f'(x)$. Avem

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} - m\frac{2}{x^3},$$

$$f'(x) = 0, \frac{2}{x^3}(x^4 - 1 - m) = 0, \quad x^4 = 1 + m.$$

Pentru ca $f(x)$ să admită extreme trebuie ca $1 + m \geqslant 0$ deci $m \geqslant -1$.

Pentru $x_1' = \sqrt[4]{1+m}$, $x_2' = -\sqrt[4]{1+m}$, derivata se anulează. Semnul derivatei este dat în tabloul următor

x	$-\infty$			$-\sqrt[4]{1+m}$				0				$\sqrt[4]{1+m}$				$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$2(\sqrt{1+m}+m)$	$\nearrow$			$+\infty$	$\searrow$			$2(\sqrt{1+m}+m)$	$\nearrow$			$+\infty$

Avem

$$f(-\sqrt[4]{1+m}) = f(\sqrt[4]{1+m}) = \sqrt{1+m} + \frac{1}{\sqrt{1+m}} + m\left(2 + \frac{1}{\sqrt{1+m}}\right) =$$

$$= \frac{1 + m + 1 + 2m\sqrt{1+m} + m}{\sqrt{1+m}} = 2(\sqrt{1+m} + m).$$

Din tablou rezultă că în ambele puncte $(-\sqrt[4]{1+m}, 2(m+\sqrt{1+m}))$, $(\sqrt[4]{1+m}, 2(m+\sqrt{1+m}))$, funcția f are un minim.

2. În particular pentru $m = 0$, aceste puncte de minim sînt $(-1, 2)$ și $(1, 2)$.

Scanned with OKEN Scanner

38. Să se determine intervalele în care graficul funcției

$$f(x) = \operatorname{Arctg} x - \frac{5}{2}\ln(1+x^2), \quad x \in R,$$

este convex sau concav.

R. Funcția este definită pe R care este și mulțimea de continuitate și de derivabilitate de orice ordin.

Intervalele în care funcția este convexă sau concavă sînt intervalele în care derivata a doua păstrează un semn constant. Avem

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{5x}{1+x^2} = \frac{1-5x}{1+x^2}, \qquad x \in R,$$

$$f''(x) = \frac{-5(1+x^2) - 2x(1-5x)}{(1+x^2)^2} = \frac{5x^2 - 2x - 5}{(1+x^2)^2}, \qquad x \in R,$$

$$f''(x) = 0,\ 5x^2 - 2x - 5 = 0,\ x_1 = \frac{1}{5}(1+\sqrt{26}),\ x_2 = \frac{1}{5}(1-\sqrt{26});$$

prin urmare

$$f''(x) < 0,\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{26}}{5}, \frac{1+\sqrt{26}}{5}\right),$$

graficul este concav;

$$f''(x) > 0,\ x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{26}}{5}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{26}}{5}, +\infty\right),$$

graficul este convex.

39. Se dau funcțiile

a) $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in R,$

b) $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in R.$

1) Pe intervalele de monotonie să se determine funcția inversă.
2) Să se calculeze prima și a doua derivată a funcțiilor inverse.

R. 1. a) Funcția sh este strict monotonă pe R (problema 8, cap. III) deci pe R se poate inversa. Avem

$$\operatorname{sh} x = y = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ ye^x = \frac{e^{2x}-1}{2}$$

sau

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0,\ e^x = y \pm \sqrt{y^2+1},$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece $e^x > 0$, rezultă numai soluția

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

deci

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}), \qquad y \in R.$$

Funcția

$$\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad x \in R,$$

se numește „argument sinus hiperbolic" și este funcția inversă a lui „sinus hiperbolic".

2a) Avem

$$(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in R,$$

$$(\operatorname{argch} x)'' = \frac{-x}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \frac{-x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad x \in R.$$

1b) Funcția ch este strict monotonă pe $(\infty, 0]$ și pe $[0, +\infty)$, conform problemei 8 capitolul III. Pe fiecare din aceste intervale vom determina funcția inversă. Pe $[0, +\infty)$ avem

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{sau} \quad 2ye^x = e^{2x} + 1,$$

sau

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0, \qquad e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Pe

$$[0, +\infty), \quad y \in [1, +\infty)$$

deci

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}), \; y \in [1, +\infty).$$

Funcția

$$\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad x \in [1, +\infty),$$

se numește „argument cosinus hiperbolic" și este funcția inversă a lui „cosinus hiperbolic" pe $[0, +\infty)$.

Pentru $x \in (-\infty, 0]$, luăm soluția

$$e^x = y - \sqrt{y^2 - 1},$$

de unde

$$x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) = \ln\left(\frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$x = -\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}), \quad y \in [1, +\infty).$$

Funcția

$$\operatorname{argch} x = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad x \in [1, +\infty)$$

este funcția inversă a lui „cosinus hiperbolic" pe $(-\infty, 0]$.

2b) $$(\operatorname{argch} x)' = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x \in [1, +\infty),$$

$$(\operatorname{argch} x)'' = \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{x^2-1} = \frac{-x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}, \quad x \in [1, +\infty).$$

În mod asemănător se calculează derivatele și pentru cealaltă ramură.

40. Se consideră ecuația

$$f(x) = x^5 - 5a^4x + 4a^3 = 0,$$

în care a este un parametru real.

1) Să se discute cu ajutorul teoremei lui Rolle natura rădăcinilor ecuației date.

2) Să se determine valoarea lui a știind că ecuația dată admite pe $x = -1$ ca rădăcină dublă.

1969. Institutul Politehnic, Iași.

R. Avem

$$f(x) = x^5 - 5a^4x + 4a^3 = 0,$$

$$f'(x) = 5x^4 - 5a^4 = 0 \quad x_1 = a, \quad x_2 = -a,$$

$$f(a) = -4a^5 + 4a^3, \; f(a) = 0, \; a_1 = 0, \; a_2 = -1, \; a_3 = +1,$$

$$f(-a) = 4a^5 + 4a^3 = 0, \; f(-a) = 0, \; a_1 = 0.$$

Formăm șirul lui Rolle cu $a \in (-\infty, 0]$

a	$f(-\infty)$	$f(a)$	$f(-a)$	$f(+\infty)$	rezultat
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3 rădăcini reale
-1	$-$	0	$-$	$+$	3 rădăcini reale, $x = -1$ dublă
	$-$	$-$	$-$	$+$	1 rădăcină reală
0	$-$	0	0	$+$	5 rădăcini reale, egale $x = 0$

Scanned with OKEN Scanner

Formăm şirul lui Rolle cu $a \in (0, +\infty)$

a	$f(-\infty)$	$f(-a)$	$f(+a)$	$f(+\infty)$	rezultat
0	−	+	+	+	1 rădăcină reală
1	−	+	0	+	3 rădăcini reale $x = 1$ dublă
$+\infty$	−	+	−	+	3 rădăcini reale

2. Pentru ca $f(x) = 0$ să aibă pe $x = -1$ rădăcina dublă trebuie ca

$$f(-1) = 0, \qquad f'(-1) = 0.$$

Avem

$$f(-1) = -1 + 5a^4 + 4a^3 = 0,$$

$$f'(-1) = 5 - 5a^4 = 0,$$

$$f'(-1) = 0, \qquad a_1 = +1, \qquad a_2 = -1.$$

Observăm că numai pentru $a = -1$ şi $f(-1)$ se anulează deci pentru $a = -1$, ecuaţia dată admite pe $x = -1$ rădăcina dublă. În adevăr în această situaţie avem factorizarea $f(x) = x^5 - 5x - 4 \equiv (x + 1)^2(x^3 - 2x^2 + 3x - 4)$, celelalte rădăcini ale lui $f(x)$ sînt rădăcinile ecuaţiei

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0.$$

41. Se dă un cilindru circular drept de înălţime h şi rază a bazei r peste care se aşază o semisferă de rază r (fig. 6). Se obţine astfel un corp K. Se cere:

1) să se studieze variaţia ariei suprafeţei corpului K în cazul cînd h şi r sînt variabile însă legate prin relaţia $h + r = a$;

2) aceeaşi problemă în cazul cînd h şi r sînt legate prin relaţia

$$\sqrt{h^2 + r^2} = a;$$

3) Să se studieze variaţia volumului corpului K cînd h şi r sînt legate prin relaţia de la punctul 1.

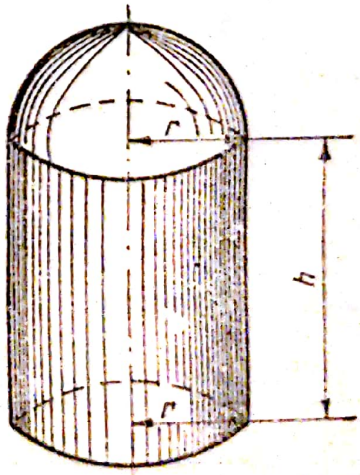


Fig. 6

R. 1. Aria suprafeţei corpului K este

$$S = S_1 + S_2,$$

unde

$$S_1 = 2\pi rh + \pi r^2,$$

este aria suprafeţei cilindrice iar

$$S_2 = 2\pi r^2,$$

este aria semisferei.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $h + r = a$, rezultă

$$S(r) = 2\pi r(a - r) + \pi r^2 + 2\pi r^2 = \pi r^2 + 2\pi ra,$$

$$S'(r) = 2\pi r + 2\pi a, \quad S'(r) = 0, \quad r = -a.$$

Variabilele h și r nu pot lua decît valori pozitive între 0 și a.
Tabloul de variație

r	0		a
$S'(r)$		$+ \quad + \quad +$	
$S(r)$	0	↗	$3\pi a^2$

Prin urmare S este crescătoare pentru $r \in [0, a]$. Valoarea minimă este luată pentru $r = 0$, $h = a$ și valoarea maximă pentru $r = a$, $h = 0$.

2. În cazul al doilea avem

$$S(r,h) = 2\pi rh + 3\pi r^2, \quad h^2 + r^2 = a^2,$$

deci

$$S(r) = 2\pi r\sqrt{a^2 - r^2} + 3\pi r^2, \qquad r \in [0, a],$$

$$S'(r) = 2\pi\sqrt{a^2 - r^2} + 2\pi r\frac{-r}{\sqrt{a^2 - r^2}} + 6\pi r;$$

$$S'(r) = 0, \; 2\pi(a^2 - r^2) - 2\pi r^2 + 6\pi r\sqrt{a^2 - r^2} = 0,$$

sau

$$2\pi a^2 - 4\pi r^2 + 6\pi r\sqrt{a^2 - r^2} = 0,$$

sau

$$(2r^2 - a^2)^2 = 9r^2(a^2 - r^2),$$

$$13r^4 - 13a^2r^2 + a^4 = 0,$$

sau

$$r^2 = \frac{1}{26}(13 \pm \sqrt{169 - 52})a^2;$$

cu soluțiile pozitive

$$r_1 = a\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{117}}{26}}, \qquad r_2 = a\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{117}}{26}}.$$

Tabloul de variație

	0			r_1					r_2					a
$S'(r)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$S(r)$	0 min				max					min					$3\pi a^2$ max

Aria totală are maxime în punctul $r = r_1$ şi în punctul $r = a$ şi minime în punctul $r = 0$ şi $r = r_2$. În punctele $r = 0$ şi $r = a$, deşi puncte de extreme, derivata $S'(r)$ nu se anulează.

3. Volumul V al corpului K este dat de

$$V = V_1 + V_2$$

unde $V_1 = \pi r^2 h$, este volumul cilindrului, iar $V_2 = \frac{2}{3}\pi r^3$ este volumul jumătăţii de sferă.

$$V = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3, \qquad r + h = a,$$

deci

$$V(r) = \pi r^2(a - r) + \frac{2}{3}\pi r^3, \quad r \in [0, a],$$

$$V'(r) = 2\pi r(a - r) - \pi r^2 + 2\pi r^2;$$

$$V'(r) = 0, \quad 2\pi ra - \pi r^2 = 0, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 2a.$$

Tabloul de variaţie este

r	0				a
$V'(r)$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$V(r)$	0	$\nearrow$			$\frac{2}{3}\pi a^3$

Volumul corpului K are un minim pentru $r = 0$ şi un maxim pentru $r = a$. În punctul $r = 0$ derivata $V'(r)$ nu se anulează.

42. Se dă un cilindru circular drept de înălţime h şi rază a bazei r pe care se aşază un con circular drept de rază a bazei r şi înălţime $2r$ (fig. 7). Se obţine astfel un corp K. Se cere:

1) să se studieze variaţia volumului corpului K în cazul cînd h şi r sînt variabile legate prin relaţia $h^2 + r^2 = a^2$;

2) să se studieze variaţia ariei suprafeţei corpului K în aceleaşi condiţii ca la punctul 1).

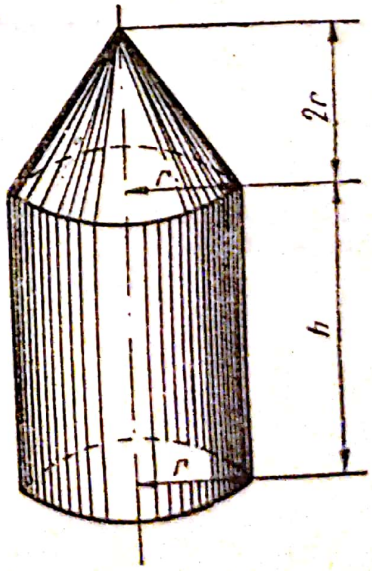


Fig. 7

R. 1. Volumul V al corpului K este

$$V = V_1 + V_2,$$

unde $V_1 = \pi r^2 h$ este volumul cilindrului

iar $V_2 = \frac{2}{3}\pi r^3$, este volumu conului.

Obţinem

$$V(r, h) = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$V(r) = \frac{\pi}{3}(3r^2\sqrt{a^2 - r^2} + 2r^3), \qquad r \in [0, a],$$

$$V'(r) = \frac{\pi}{3}\left(6r\sqrt{a^2 - r^2} - \frac{3r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}} + 6r^2\right),$$

$$V'(r) = 0, \quad 6r(a^2 - r^2) - 3r^3 + 6r^2\sqrt{a^2 - r^2} = 0,$$

sau

$$r(2a^2 - 3r^2 + 2r\sqrt{a^2 - r^2}) = 0,$$

cu soluția $r_1 = 0$ și

$$(3r^2 - 2a^2)^2 = 4r^2(a^2 - r^2),$$

sau

$$13r^4 - 16a^2r^2 + 4a^4 = 0,$$

cu soluțiile pozitive

$$r_1 = a\sqrt{\frac{8 - \sqrt{12}}{13}}, \qquad r_2 = a\sqrt{\frac{8 + \sqrt{12}}{13}}.$$

Tabloul de variație

r	0				r_1				r_2				a
$V'(r)$	+	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	
$V(r)$	0 min				max				min				$\frac{2}{3}\pi a^3$ max

Volumul corpului K are maxime în punctele $r = r_1$ și $r = a$ și minime în punctul $r = 0$ și $r = r_2$. În punctele $r = 0$ și $r = a$, deși puncte de extremum, derivata $V'(r)$ nu se anulează.

2. Aria S a suprafeței corpului K este dată de

$$S = S_1 + S_2,$$

unde $S_1 = 2\pi rh + \pi r^2$ este aria suprafeței cilindrice și $S_2 = \pi r^2\sqrt{5}$ este aria suprafeței conice. Avem

$$S = 2\pi rh + \pi(1 + \sqrt{5})r^2,$$

sau

$$S(r) = 2\pi r\sqrt{a^2 - r^2} + \pi(1 + \sqrt{5})r^2, \quad r \in [0, a],$$

$$S'(r) = 2\pi\sqrt{a^2 - r^2} + 2\pi r\frac{-r}{\sqrt{a^2 - r^2}} + 2\pi(1 + \sqrt{5})r,$$

$$S'(r) = 0, \qquad 2\pi(a^2 - r^2) - 2\pi r^2 + 2\pi r(1 + \sqrt{5})\sqrt{a^2 - r^2} = 0,$$

sau

$$a^2 - 2r^2 + (1+\sqrt{5})\, r\sqrt{a^2 - r^2} = 0,$$

sau

$$(a^2 - 2r^2)^2 - (1+\sqrt{5})^2 r^2 (a^2 - r^2) = 0,$$

$$[4 + (1+\sqrt{5})^2] r^4 - [4 + (1+\sqrt{5})^2] a^2 r^2 + a^4 = 0,$$

cu rădăcinile pozitive

$$r_1 = a\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{10 + 2\sqrt{5}}}},\quad r_2 = a\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{10 + 2\sqrt{5}}}}$$

Tabloul de variație

r	0			r_1				r_2			a
$S'(r)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$S(r)$	0		$\nearrow$	max		$\searrow$		min	$\nearrow$		$\pi(1+\sqrt{5})a^2$

Aria $S(r)$ a suprafeței corpului K are maxime locale în punctele $r = r_1$ și $r = a$ și minime locale în punctele $r = 0$ și $r = r_2$. În punctele $r = 0$ și $r = a$ deși $S(r)$ are cîte un extremum, $S'(r)$ nu se anulează.

43. Fie $f(x)$ și $g(x)$ două funcții definite pe $[a, b]$ și $F(x) = f(x)\sin^2 x + g(x)\cos^2 x$. Să se arate că pentru orice $x \in [a, b]$ avem

$$f(x) \leqslant F(x) \leqslant g(x),$$

sau

$$f(x) \geqslant F(x) \geqslant g(x).$$

R. În punctele în care $f(x) > g(x)$ putem scrie

$$f(x) - f(x)\sin^2 x - g(x)\cos^2 x = \cos^2 x[f(x) - g(x)] \geqslant 0,$$

sau

$$f(x) \geqslant f(x)\sin^2 x + g(x)\cos^2 x,$$

însă

$$f(x)\sin^2 x + g(x)\cos^2 x \geqslant g(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = g(x);$$

de unde rezultă că

$$f(x) \geqslant f(x)\sin^2 x + g(x)\cos^2 x \geqslant g(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

În punctele în care $f(x) < g(x)$ avem

$$f(x) - f(x)\sin^2 x - g(x)\cos^2 x = \cos^2 x[f(x) - g(x)] \leqslant 0,$$

deci

$$f(x) \leqslant f(x)\sin^2 x + g(x)\cos^2 x;$$

însă

$$f(x)\sin^2 x + g(x)\cos^2 x \leqslant g(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = g(x),$$

prin urmare în acest caz avem

$$f(x) \leqslant f(x)\sin^2 x + g(x)\cos^2 x \leqslant g(x).$$

În punctele în care $f(x) = g(x)$ avem imediat

$$f(x) = f(x)\sin^2 x + g(x)\cos^2 x = g(x).$$

Observație. Graficul funcției $F(x)$ are punctele de abscisă $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ comune cu ale graficului funcției $f(x)$ și punctele de abscise $x = k\pi$, comune cu punctele graficului funcției $g(x)$; pentru celelalte puncte ale mulțimii de definiție punctele graficului lui F se găsesc între punctele graficelor funcțiilor f și g.

44. Să se arate că avem

$$\log_a(1 + x) < x < \log_a \frac{1}{1 - x} + \log_a\left(\log_a e^{\frac{a}{e}}\right),$$

pentru orice $x \in \left(0, 1 - \frac{1}{\ln a}\right)$ și orice $a > e$.

R. Să considerăm funcția

$$f_1(x) = x - \log_a(1 + x), \qquad x \in (0, 1).$$

Avem $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = 1 - \log_a(2) > 0$,

$$f_1'(x) = 1 - \frac{1}{\ln a}\frac{1}{1 + x}, \quad f_1'(x) = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{\ln a} - 1;$$

punctul $x_1 \in (-1, 0)$ deoarece $\ln a > 1$ deci $\frac{1}{\ln a} < 1$;

în acest punct $f_1(x)$ are un minim deoarece

$$f_1''(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{(1 + x)^2} > 0 \quad \text{pe} \quad (-1, +1);$$

rezultă de aici că $f_1(x) > 0$ pe $(0, 1)$ deci

(α) $$x - \log_a(1 + x) > 0 \quad \text{pe} \quad (0, 1).$$

Să considerăm și funcția

$$f_2(x) = x - \log_a \frac{1}{1-x}, \qquad x \in (0, 1).$$

Avem $f_2(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1-} f_2(x) = -\infty$

$$f_2'(x) = 1 - \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{1-x}, \quad f_2'(x) = 0, \quad x_1' = 1 - \frac{1}{\ln a}$$

și

$$x_1' \in (0, 1)\,;\ \text{avem și } f_1''(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{-1}{(1-x)^2} < 0,$$

pe $(0, 1)$ deci în punctul x_1', f_2 are un maximum;

$$\text{pentru } x \in \left(0, 1 - \frac{1}{\ln a}\right] \text{ avem}$$

$$(\alpha') \qquad x - \log_a \frac{1}{1-x} < \log_a\left(\log_a e^{\frac{a}{e}}\right),$$

deoarece $f_2(0) = 0$, și $f_2\left(1 - \frac{1}{\ln a}\right) = 1 - \frac{1}{\ln a} + \log_a \frac{1}{\ln a} =$

$$= 1 - \log_a e + \log_a(\log_a e) = \log_a a - \log_a e + \log_a(\log_a e) =$$

$$= \log_a \frac{a}{e} + \log_a(\log_a e) = \log_a\left(\log_a e^{\frac{a}{e}}\right).$$

Rezultă în final, din inegalitățile (α) și (α'):

$$\log_a(1 + x) < x < \log_a \frac{1}{1-x} + \log_a\left(\log_a e^{\frac{a}{e}}\right).$$

45. Se dă un cilindru circular drept de rază a bazei r și înălțimea h, peste care se așează o calotă sferică de rază a bazei r, înălțime $2h$, raza sferei din care provine calota fiind R. Se cere să se studieze variația ariei suprafeței corpului astfel obținut (fig. 8)

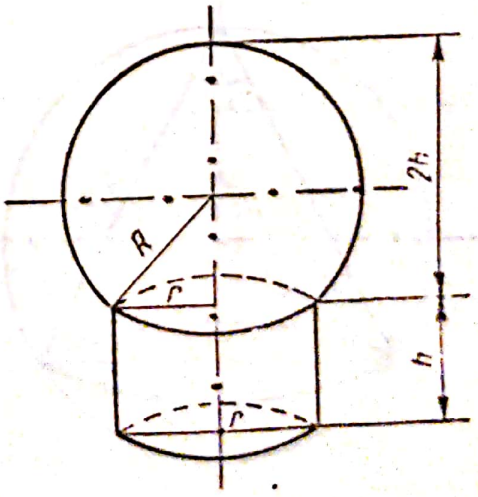


Fig. 8

R. Aria S a suprafeței corpului obținut este

$$S = S_1 + S_2 + S_3,$$

unde $S_1 = \pi r^2$ este aria bazei cilindrului, $S_2 = 2\pi rh$ este aria suprafeței laterale a cilindrului iar

$S_3 = 4\pi Rh$ este aria calotei.

Avem relația $r^2 = R^2 - (2h - R)^2 = 4h(R - h)$, de unde rezultă imediat

$$S(h) = 4\pi h(R - h) + 4\pi h\sqrt{h(R - h)} + 4\pi Rh.$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcția $S(h)$ are mulțimea de definiție $(0, R]$; mulțimea de derivabilitate este $(0, R)$. Derivăm

$$S'(h) = 8\pi(R - h) + 2\pi \frac{3hR - 4h^2}{\sqrt{h(R - h)}},$$

$$S'(h) = 0, \quad 4(R - h)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{h}(3R - 4h) = 0.$$

Deoarece $R - h \geqslant 0$, $h > 0$ rezultă că derivata nu admite rădăcini decît în intervalul $\left(\frac{3}{4} R, R\right)$.
În acest interval avem

$$4(R - h)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{h}(4h - 3R),$$

și putem ridica la pătrat

$$16(R - h)^3 = h(4h - 3R)^2,$$

sau

$$g(h) = 32h^3 - 72Rh^2 + 57R^2h - 16R^3 = 0,$$

$$g'(h) = 96h^2 - 144Rh + 57R^2 = 0,$$

ecuația $g'(h) = 0$ nu admite nici o rădăcină reală prin urmare ecuația $g(h) = 0$ are o singură rădăcină reală, $h \in (0, R)$ deoarece $g(0) < 0$, $g(R) = 89R^3 - 88R^3 > 0$. Observăm că $S'(0 + 0) > 0$, $S'(R - 0) < 0$ deci în acest punct $S(h)$ are un maximum.
Tabloul de variație

h	0					h_1				R
$S'(h)$	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−
$S(h)$	0		↗			maxim		↘		$4\pi R^2$

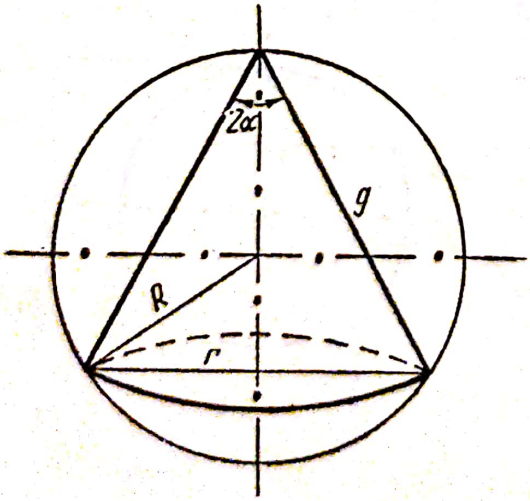


Fig. 9

46. Să se determine conul circular drept înscris în sfera de rază R care are suprafața totală maximă (fig. 9).

R. Dacă r este raza arcului bazei conului și g generatoarea avem

$$S = \pi rg + \pi r^2.$$

Luăm ca variabilă independentă unghiul α, jumătatea unghiului de la vîrf. Avem

$$g = 2R \cos \alpha, \quad r = 2R \sin \alpha \cos \alpha, \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

deci

$$S(\alpha) = 4\pi R^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 4\pi R^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha;$$

Scanned with OKEN Scanner

extremele lui $S(\alpha)$ se obțin anulind $S'(\alpha)$,

$$S'(\alpha) = 4\pi R^2(\cos^3\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha\cos^3\alpha - 2\sin^3\alpha\cos\alpha)$$

$$S'(\alpha) = 0, \quad \cos\alpha(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha - 2\sin^3\alpha) = 0;$$

$\cos\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ne dă un minim $S(\alpha) = 0$; mai rămîne

$$4\sin^3\alpha + 3\sin^2\alpha - 2\sin\alpha - 1 = 0,$$

cu soluția $\sin\alpha = -1$, neacceptabilă. Mai rămîne

$$4\sin^2\alpha - \sin\alpha - 1 = 0,$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{17}}{8}, \quad \sin\alpha_2 = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{17}}{8};$$

deoarece $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă singura soluție

$$\sin\alpha = \frac{1+\sqrt{17}}{8},$$

pentru care $S(\alpha)$ are un maxim.

47. Să se afle cilindrul de volum maxim înscris într-un con circular drept ale cărui generatoare sînt înclinate cu 45° față de planul bazei și care are aria totală egală cu πa^2.

1968. Institutul Politehnic, Galați

R. Din figura 10 avem:

$$\overline{AS} = r\sqrt{2}, \quad \overline{OB} = r,$$

deci aria totală a conului este

$$\pi r^2\sqrt{2} + \pi r^2 = \pi a^2$$

de unde $r = \frac{a}{1+\sqrt{2}}$, $a > 0$,

Dacă în cilindru luăm ca necunoscută x = raza cercului bazei avem înălțimea cilindrului h, dată de $h = r - x = \frac{a}{1+\sqrt{2}} - x$ deci volumul cilindrului înscris în con este

$$V(x) = \pi x^2\left(\frac{a}{1+\sqrt{2}} - x\right).$$

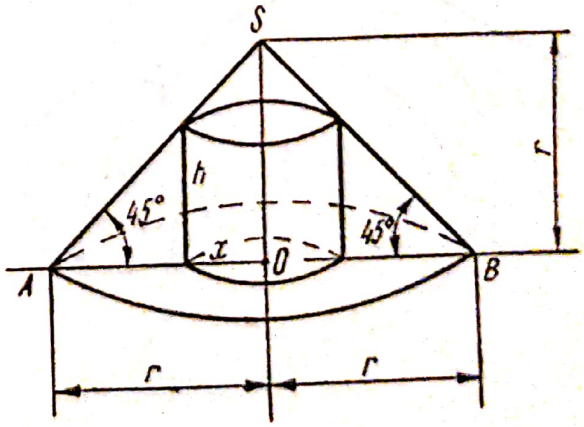


Fig. 10

Funcția $V(x)$ admite un extremum în punctul în care $V'(x) = 0$. Avem

$$V'(x) = \pi\left(2x\frac{a}{1+\sqrt{2}} - 3x^2\right),$$

$$V'(x) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2}{3}\frac{a}{1+\sqrt{2}}.$$

Pentru $x_1 = 0$, $V = 0$, deci minim

$$V''(x) = \pi\left(\frac{2a}{1+\sqrt{2}} - 6x\right), \quad V''(x_2) < 0,$$

deci în punctul x_2, V este maxim și are valoarea

$$V\left(\frac{2}{3}\frac{a}{1+\sqrt{2}}\right) = \frac{4\pi}{27}\cdot\frac{a^3}{(1+\sqrt{2})^3}.$$

48. Fie un semicerc C de diametru $AB = 2a$. Pe semicerc se consideră un punct variabil M astfel încît $AM = x$. Pe segmentele AM, BM ca diametri se descriu cercurile O_1 și O_2. Să se studieze variația ariei domeniului comun celor două cercuri.

R. Pe figura 11 observăm că punctul P, al doilea punct comun celor două cercuri, se găsește pe AB, și este piciorul perpendicularei dusă din M pe AB deci

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle PMB = \theta.$$

Aria lentilei astfel formate $S(x)$ este dată de

$S(x)$ = aria sect. O_1PM − aria tr. O_1PM + aria sect. O_2PM − aria tr. O_2PM

$$\text{aria sect. } O_1PM = \frac{1}{4}x^2\theta;$$

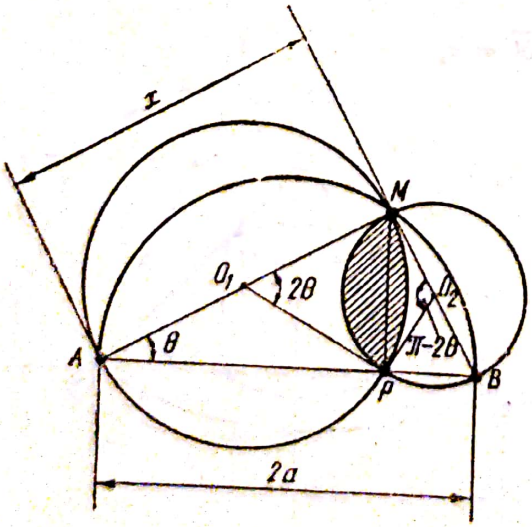


Fig. 11

$$\text{aria tr. } O_1PM = \frac{1}{4}x^2\sin\theta\cos\theta;$$

$$\text{aria sect. } O_2PM = \frac{1}{8}(4a^2 - x^2)(\pi - 2\theta),$$

$$\text{aria tr. } O_2PM = \frac{1}{4}(4a^2 - x^2)\sin\theta\cos\theta,$$

însă $x = 2a\cos\theta$, $\cos\theta = \frac{x}{2a}$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2a},$$

iar $\theta = \arccos\frac{x}{2a}$, $x \in [0,\ 2a]$, de unde

Scanned with OKEN Scanner

rezultă

$$S(x) = \frac{1}{4}x^2 \arccos\frac{x}{2a} - \frac{x^3}{16a^2}\sqrt{4a^2 - x^2} +$$

$$+ \frac{\pi}{8}(4a^2 - x^2) - \frac{1}{4}(4a^2 - x^2)\arccos\frac{x}{2a} - \frac{1}{16a^2}(4a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}x$$

sau

$$S(x) = \frac{1}{2}x^2 \arccos\frac{x}{2a} - \frac{1}{4}x\sqrt{4a^2 - x^2} + \frac{\pi}{8}(4a^2 - x^2) - a^2 \arccos\frac{x}{2a}$$

$S(0) = 0$, $S(2a) = 0$, deci $S(x)$ are un maximum în $(0, 2a)$.

$$S'(x) = x\arccos\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{2}\left(-\frac{\frac{1}{2a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4a^2}}}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{4a^2 - x^2} +$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}} - \frac{\pi}{4}x + a^2\frac{\frac{1}{2a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4a^2}}},$$

sau

$$S'(x) = x\left(\arccos\frac{x}{2a} - \frac{\pi}{4}\right), \qquad x \in [0, 2a],$$

$$S'(x) = 0, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 2a\frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$

Pentru $x_2 = a\sqrt{2}$, $0 = \frac{\pi}{4}$ deci lentila comună are aria maximă cînd cele două cercuri sînt egale.

Valoarea maximă este

$$S(a\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\cdot a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2} + \frac{\pi}{8}\cdot 2a^2 - a^2\cdot\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{4}(\pi - 2)a^2.$$

49. Se construiește un canal deschis de secțiune un trapez isoscel completat cu un semicerc, (fig. 12) de bază $2x$, înălțime y și înclinarea pereților laterali 45°.

Se cere să se studieze variația secțiunii canalului știind că perimetrul udat este constant.

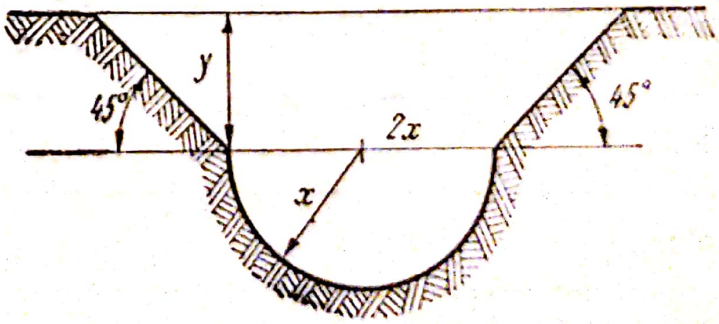


Fig. 12

R. Perimetrul udat

$$a = \pi x + 2\sqrt{2}y.$$

Secțiunea canalului:

$$S(x, y) = \frac{1}{2}\pi x^2 + (2x + y)y.$$

Eliminăm pe y între cele două relații

$$y = \frac{a - \pi x}{2\sqrt{2}},$$

și obținem pe S funcție numai de x

$$S(x) = \frac{1}{2}\pi x^2 + \left(2x + \frac{a - \pi x}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a - \pi x}{2\sqrt{2}}\right),$$

sau

$$S(x) = \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{1}{8}(a - \pi x)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x(a - \pi x).$$

Trebuie să calculăm pe $S'(x)$

$$S'(x) = \pi x - \frac{\pi}{4}(a - \pi x) + \frac{1}{\sqrt{2}}(a - 2\pi x),$$

$$S'(x) = 0,$$

$$= \frac{a\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\pi\left(1 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{a(\pi - 2\sqrt{2})}{\pi(4 + \pi - 4\sqrt{2})},$$

$$S''(x) = \pi + \frac{\pi^2}{4} - \sqrt{2}\pi > 0.$$

Tabloul de variație

x	0				$\frac{a(\pi - 2\sqrt{2})}{\pi(4 + \pi - 4\sqrt{2})}$								$\frac{a}{\pi}$
$S'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$S''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$				$+$		$+$	$+$	$+$	
$S(x)$	$\frac{a^2}{8}$		$\searrow$		$S(x_1)$		$\nearrow$						$\frac{a^2}{2\pi}$

cu

$$S(x_1) = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{\pi}\,\frac{(\pi - 2\sqrt{2})^2}{(4+\pi-4\sqrt{2})^2} + \frac{a^2}{8}\,\frac{(4-2\sqrt{2})^2}{(4+\pi-4\sqrt{2})^2} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{a^2}{\pi}\,\frac{(\pi-2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}{(4+\pi-4\sqrt{2})^2}.$$

Din tablou se vede că secțiunea este maximă pentru cazul cînd canalul are secțiune un semicerc de rază $R = \frac{a}{\pi}$. În punctul x_1, S este minimă.

50. Se dă funcția

$$Fx) = \sqrt{g^2(x) + g(x) + 1}$$

unde $g(x)$ este o funcție derivabilă de două ori pe $(-1, +1)$; se cere să se calculeze $F'(x)$ și $F''(x)$.

R. Funcția $g(x)$ este continuă pe $(-1, +1)$ și derivabilă de două ori pe $(-1, +1)$. Deoarece

$$h(x) = g^2(x) + g(x) + 1$$

este strict pozitivă pe $(-1, +1)$ și derivabilă de două ori pe $(-1, +1)$, urmează că $F(x)$ este derivabilă de două ori pe $(-1, +1)$.

Avem

$$F'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{2g(x)g'(x) + g'(x)}{\sqrt{g^2(x) + g(x) + 1}}, \qquad x \in (-1, +1),$$

$$F''(x) = \frac{1}{2}\,\frac{2g'(x)g'(x) + 2g(x)g''(x) + g''(x)}{\sqrt{g^2(x) + g(x) + 1}}$$

$$- \frac{1}{4}\,\frac{[2g(x)g'(x) + g'(x)]^2}{\sqrt{[g^2(x) + g(x) + 1]^3}}, \quad x \in (-1, +1).$$

Se observă că $h(x)$ trebuie să fie strict pozitivă pe $(-1, +1)$ pentru ca $F'(x)$ să fie derivabilă pe $(-1, +1)$; dacă ar exista puncte în care $h(x) = 0$, în acele puncte $F(x)$ nu ar mai fi derivabilă.

51. Se dă funcția

$$f(x) = \begin{cases} \ln^2(x+1), & x \in (-1, 0), \\ 0, & x = 0, \\ ax^2 + bx + c, & x > 0, \end{cases}$$

și se cere să se determine a, b, c astfel încît funcția $f(x)$ să fie derivabilă de două ori în punctul $x = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

R. Funcția $f(x)$ trebuie să fie continuă în punctul $x = 0$, deoarece îi cerem să fie derivabilă.

$$\ln^2(x+1)\Big|_{x=0} = 0 = ax^2 + bx + c\Big|_{x=0}$$

care dă $c = 0$. Funcția $f(x)$ (cu $c = 0$) fiind continuă în $x = 0$, pentru a fi derivabilă în punctul $x = 0$, trebuie ca derivatele la dreapta și la stînga să fie finite și egale. Avem

$$[\ln^2(x+1)]'_{0-} = \frac{2}{x+1}\ln(x+1)\Big|_{0-} = 0,$$

$$[ax^2 + bx]_{0+} = [2ax + b]_{0+} = b \quad \text{deci} \quad b = 0.$$

Deoarece f este continuă și derivabilă în punctul $x = 0$ (cu $b = 0$, $c = 0$), pentru a fi derivabilă de două ori în acest punct este suficient ca derivatele secunde la dreapta și la stînga să fie finite și egale. Avem:

$$[\ln^2(x+1)]''_{0-} = \left[\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^2}\ln(x+1)\right]_{0-} = 2,$$

$$[ax^2]''_{0+} = 2a\Big|_{0+} = 2a;$$

deci condiția

$$f''(0-) = f''(0+) = 2, \quad \text{dă} \quad a = 1.$$

Prin urmare funcția

$$f(x) = \begin{cases} \ln^2(1+x^2), & x \in (-1, 0), \\ 0, & x = 0, \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$$

este derivabilă de două ori pe mulțimea de definiție.

Graficul ei este dat în figura 13. Astfel de curbe servesc în practică pentru racordări.

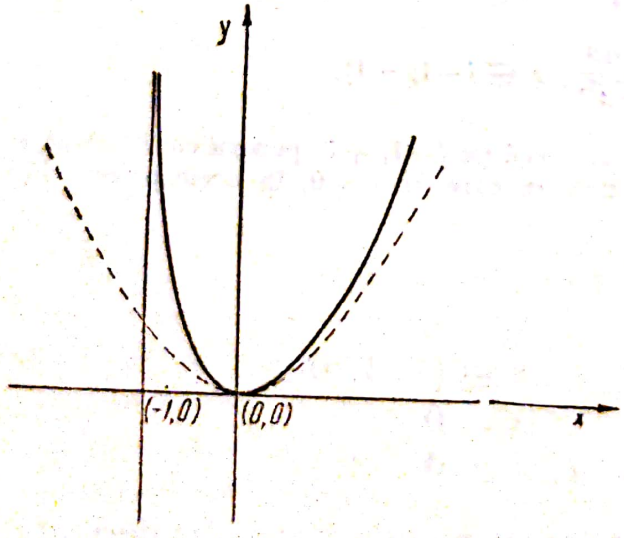


Fig. 13

52. Să se calculeze derivata de ordinul trei a funcției

$$F(x) = f[\operatorname{Arctg} x], \quad x \in R,$$

unde $f(u)$ este o funcție derivabilă de trei ori pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

R. Mulțimea valorilor lui Arctg x este $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, care este mulțimea de definiție a lui f. Funcția F este deriva-

Scanned with OKEN Scanner

bilă pe R deoarece Arctg este derivabilă pe R și f este derivabilă pe mulțimea valorilor lui Arctg.

$$F'(x) = f'(\text{Arctg } x)\,[\text{Arctg } x]' = \frac{1}{1+x^2} f'(\text{Arctg } x),$$

$$F''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} f'(\text{Arctg } x) + \frac{1}{(1+x^2)^2} f''(\text{Arctg } x),$$

$$F'''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2} f'(\text{Arctg } x) + \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} f'(\text{Arctg } x) - \frac{2x}{(1+x^2)^2} f''(\text{Arctg } x) -$$

$$- \frac{4x}{(1+x^2)^2} f''(\text{Arctg } x) + \frac{1}{(1+x^2)^2} f'''(\text{Arctg } x),$$

sau

$$F'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} f'(\text{Arctg } x) - \frac{6x}{(1+x^2)^3} f''(\text{Arctg } x) + \frac{1}{(1+x^2)^2} f'''(\text{Arctg } x), \qquad x \in R.$$

53. Se dă funcția

$$f(x) = e^{\ln x}, \qquad x > 0.$$

Să se calculeze $f''(x)$ și să se explice rezultatul.

R. Mulțimea de derivabilitate de orice ordin pentru f este mulțimea de definiție, deci $(0, +\infty)$. Avem

$$f'(x) = \frac{1}{x} e^{\ln x}, \quad x > 0,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\ln x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} e^{\ln x}, \quad x > 0,$$

deci

$$f''(x) \equiv 0 \text{ pe } (0, +\infty).$$

Acest rezultat arată că pe $(0, +\infty)$, $f(x)$ este de forma $ax + b$. În adevăr observăm că

$$e^{\ln x} = x, \qquad x > 0$$

deci $\qquad f(x) = x,\ x > 0$ și $f'(x) = 1, \quad f''(x) = 0$ pe $(0, +\infty)$.

54. Să se arate că funcția

$$y(x) = (x + \sqrt{x^2-1})^n,\ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

și primele ei două derivate verifică relația

$$(x^2-1)\,y'' + xy' - n^2 y = 0.$$

R. Pe mulțimea de definiție $y(x)$ este derivabilă de două ori. Avem

$$y'(x) = n(x + \sqrt{x^2-1})^{n-1} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$y'(x) = n \cdot y(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$y''(x) = ny'(x)\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - ny(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2-1)^3}},$$

sau, ținînd seama de expresia lui $y'(x)$,

$$y''(x) = n^2 \cdot y(x)\frac{1}{x^2-1} - ny(x)\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$$

Am obținut pe y' și y''; le înlocuim în ecuația dată și avem

$$(x^2-1)\left[n^2y\frac{1}{x^2-1} - ny\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\right] + ny\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - n^2y =$$

$$= y\left(n^2 - n\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) + y\left(\frac{nx}{\sqrt{x^2-1}} - n^2\right) = 0.$$

55. Să se arate că funcția

$$y(x) = \frac{a}{x} + bx^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}, \quad x > 0,$$

unde a, b sînt două numere oarecare verifică ecuația

$$x^2y'' - 2y = \ln x.$$

R. Pentru $x > 0$, funcția este derivabilă de două ori; avem

$$y' = -\frac{a}{x^2} + 2bx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x},$$

$$y'' = +\frac{2a}{x^3} + 2b + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}.$$

Înlocuim pe y și y'' în ecuația dată, avem

$$x^2\left(\frac{2a}{x^3} + 2b + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right) - 2\left(\frac{a}{x} + bx^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}\right) = \ln x,$$

sau

$$\frac{2a}{x} + 2bx^2 + \frac{1}{2} - \frac{2a}{x} - 2bx^2 + \ln x - \frac{1}{2} = \ln x.$$

56. Se dă

$$f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

și se cere:

1) să se determine mulțimile de definiție, de continuitate și de derivabilitate;

Scanned with OKEN Scanner

2) să se calculeze derivata de ordinul n.

R. 1. Mulțimea de definiție este dată de punctele x pentru care $x^2 - 3x + 2 > 0$. Avem $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ deci $x^2 - 3x + 2 > 0$, pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$. Mulțimea de definiție este și mulțimea de continuitate cît și de derivabilitate deoarece putem scrie

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x-2), \qquad x \in (2, +\infty),$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(2-x), \qquad x \in (-\infty, 1),$$

iar, fiecare din funcțiile care compun pe $f(x)$ sînt continue și derivabile pe intervalul respectiv.

2. Pentru fiecare interval în parte calculăm derivata de ordinul n; avem:

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x-2), \quad x \in (2, +\infty),$$

deci

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x-2)^2},$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}\frac{(-1)^2 \cdot 1 \cdot 2}{(x-1)^3} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^2 \cdot 1 \cdot 2}{(x-2)^3},$$

deci în general

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-2)^n}.$$

Pentru a fi siguri că aceasta este expresia derivatei de ordinul n mai derivăm odată și observăm că în noua expresie obținută se înlocuiește n cu $n+1$.
Pe intervalul $(-\infty, 1)$ avem

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(2-x),$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{1}{2-x},$$

sau

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-2},$$

deci aceeași expresie ca și pentru intervalul $(2, +\infty)$.
Deducem că derivata de ordinul n are expresia

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x-1)^n} + \frac{1}{(x-2)^n}\right]$$

pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

57. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}, \quad x \in R - \{-1, 1\}.$$

R. Făcînd împărțirea lui x^3 cu $x^2 - 1$ obținem:

$$\frac{x^3}{x^2 - 1} = x + \frac{x}{x^2 - 1}$$

însă

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x + 1},$$

deci

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x + 1}.$$

Derivta de ordinul $n \geqslant 2$ a funcției x este zero.

Notăm

$$g(x) = \frac{1}{x - 1}, \quad x \in R - \{-1, +1\},$$

avem

$$g'(x) = \frac{-1}{(x - 1)^2}, \quad g''(x) = (-1)^2 \frac{1 \cdot 2}{(x - 1)^3},$$

și în general

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x - 1)^{n+1}}.$$

Dacă punem

$$h(x) = \frac{1}{x + 1}, \quad x \in R - \{-1, +1\},$$

$$h'(x) = \frac{-1}{(x + 1)^2}, \quad h''(x) = (-1)^2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{(x + 1)^3},$$

și în general

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x + 1)^{n+1}},$$

încît obținem pentru $n \geqslant 2$ și $x \in R - \{-1, 1\}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(-1)^n n! \left[\frac{1}{(x - 1)^{n+1}} + \frac{1}{(x + 1)^{n+1}}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

58. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției

$$f(x) = x \ln(1 + mx), \quad x > -\frac{1}{m}.$$

R. Avem

$$f'(x) = \ln(1 + mx) + x \cdot \frac{m}{1 + mx},$$

$$f''(x) = \frac{m}{1 + mx} + \frac{m}{1 + mx} - x \cdot \frac{m^2}{(1 + mx)^2},$$

$$f'''(x) = -\frac{2m^2}{(1 + mx)^2} - \frac{m^2}{(1 + mx)^2} + x \frac{1 \cdot 2 \cdot m^3}{(1 + mx)^3},$$

deci

$$f'''(x) = -3 \cdot \frac{m^2}{(1 + mx)^2} + x \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot m^3}{(1 + mx)^3},$$

$$f''''(x) = 3 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot m^3}{(1 + mx)^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot m^3}{(1 + mx)^3} - x \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m^4}{(1 + mx)^4};$$

observăm că putem scrie

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n \cdot \frac{(n-2)!\, m^{n-1}}{(1 + mx)^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!\, m^n}{(1 + mx)^n} x \qquad (I)$$

cel puțin pentru $n = 2, 3, 4$. Să arătăm că acest rezultat este general. Folosim metoda inducției. Pentru $n = 2$, (1) este adevărată; presupunem că formula (1) este adevărată până la $n \geqslant 2$ și să arătăm că este adevărată și pentru $n + 1$. În acest scop derivăm încă odată pe (1); obținem:

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} n(n-1)! \frac{m^n}{(1 + mx)^n} + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!\, m^n}{(1 + mx)^n} + (-1)^n \frac{n!\, m^{n+1}}{(1 + mx)^{n+1}} x,$$

sau

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n + 1) \cdot (n - 1)! \frac{m^n}{(1 + mx)^n} + (-1)^n \frac{n! \cdot m^{n+1}}{(1 + mx)^{n+1}} x,$$

rezultat care se obține schimbînd în (1) pe n cu $n + 1$.
Rezultă de aici că derivata de ordinul n a funcției din enunț este dată de (1) pentru $n = 2, 3, \ldots$ și $x > -\frac{1}{m}$.

59. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției

$$f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x, \quad x \in R.$$

R. Putem scrie

$$\cos^4 x + \sin^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x,$$

însă $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$, deci

$$\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

Avem

$$f'(x) = -\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \sin 4x = -\sin 4x,$$

$$f''(x) = -4\cos 4x,\ f'''(x) = 4^2 \cdot \sin 4x \text{ și in general}$$

$$f^{(4m)}(x) = 4^{4m-1}\cos 4x,\ f^{(4m+1)}(x) = -4^{4m}\sin 4x,$$

$$f^{(4m+2)}(x) = -4^{4m+1}\cos 4x,\ f^{(4m+3)}(x) = 4^{4m+2}\sin 4x.$$

Să observăm insă că

$$[\cos mx]' = -m\sin mx = m\cos\left(mx + \frac{\pi}{2}\right),$$

deci

$$[\cos mx]^{(p)} = m^p \cos\left(mx + p\frac{\pi}{2}\right).$$

În mod asemănător avem $(\sin mx)' = m\cos mx = m\sin\left(mx + \frac{\pi}{2}\right)$ deci

$$(\sin mx)^{(p)} = m^p \sin\left(mx + p\frac{\pi}{2}\right).$$

Această observație ne permite să scriem derivata de ordinul n într-o singură expresie astfel

$$f^{(n)}(x) = 4^{n-1}\cos\left(4x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots, x \in R.$$

60. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției

$$f(x) = xe^x, \quad x \in R.$$

R. Avem

$$f'(x) = e^x + xe^x,$$

$$f''(x) = e^x + xe^x + e^x = 2e^x + xe^x,$$

$$f'''(x) = 3e^x + xe^x,\ f''''(x) = 4e^x + xe^x.$$

Din calculul acestor derivate observăm că

$$f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x, \qquad x \in R,$$

cel puţin pentru $n = 1, 2, 3, 4$. Să arătăm că este adevărată pentru orice $n \in N$. În acest scop folosim metoda inducţiei. Presupunem că este adevărată pentru $n = p$ deci

$$f^{(p)}(x) = pe^x + xe^x,$$

şi să arătăm că este adevărată şi pentru $n = p + 1$; avem

$$f^{(p+1)}(x) = pe^x + e^x + xe^x = (p + 1)e^x + xe^x$$

deci este adevărată şi pentru $p + 1$. Pentru $n = 1$, este adevărată, deci este adevărată pentru orice $n \in N$.
A fost necesar să calculăm derivatele de ordinele 2, 3, 4 pentru a se putea deduce forma generală.

61. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei

$$f(x) = \sin ax \sin bx \sin cx, \quad x \in R.$$

R. Pentru calculul derivatei de ordinul n a lui f este util să scriem pe f sub formă de sumă de funcţii trigonometrice. Avem

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\cos(a - b)x - \frac{1}{2}\cos(a + b)x$$

$$\sin ax \sin bx \sin cx = \frac{1}{2}\cos(a - b)x \sin cx - \frac{1}{2}\cos(a + b)x \sin cx =$$

$$= \frac{1}{4}\sin(a - b + c)x - \frac{1}{4}\sin(a - b - c)x - \frac{1}{4}\sin(a + b + c)x + \frac{1}{4}\sin(a + b - c)x$$

şi folosim rezultatul de la problema 59, unde am arătat că

$$\sin^{(n)}(ax) = a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos^{(n)}(ax) = a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Avem aşadar

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}(a - b + c)^n \sin\left[(a - b + c)x + n\frac{\pi}{2}\right] -$$

$$- \frac{1}{4}(a - b - c)^n \sin\left[(a - b - c)x + n\frac{\pi}{2}\right] -$$

$$- \frac{1}{4}(a + b + c)^n \sin\left[(a + b + c)x + n\frac{\pi}{2}\right] +$$

$$+ \frac{1}{4}(a + b - c)^n \sin\left[(a + b - c)x + n\frac{\pi}{2}\right], \qquad x \in R.$$

Scanned with OKEN Scanner

62. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției

$$f(x) = \sin x \sin 2x \sin 4x \sin 5x, \quad x \in R.$$

R. Avem $\sin x \sin 5x = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x$,

$$\sin 2x \sin 4x = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 6x, \quad \text{deci}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(\cos 2x \cos 4x - \cos 2x \cos 6x - \cos 4x \cos 6x + \cos^2 6x)$$

sau

$$f(x) = \frac{1}{8}(1 + \cos 2x - \cos 2x - \cos 4x + \cos 6x - \cos 8x - \cos 10x + \cos 12x), \quad x \in R,$$

și pentru că:

$$\cos^{(n)} ax = a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right),$$

obținem pentru $x \in R$ și $n = 1, 2, \ldots,$

$$f^{(n)}(x) = -\frac{1}{8}4^n \cos\left(4x + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{8}6^n \cos\left(6x + n\frac{\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{8}\cdot 8^n \cos\left(8x + n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{8}10^n \cos\left(10x + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{8}12^n \cos\left(12x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

63. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției

$$g(x) = x f(x), \quad x \in (a, b),$$

unde f este derivabilă de n ori în (a, b).

R. Funcția $g(x)$ este derivabilă de n ori deoarece este produsul a două funcții derivabile de n ori. Avem:

$$g'(x) = f(x) + xf'(x),$$
$$g''(x) = 2f'(x) + xf''(x),$$
$$g'''(x) = 3f''(x) + xf'''(x),$$

observăm că putem scrie pentru $m = 1, 2, 3,$

$$g^{(m)}(x) = mf^{(m-1)}(x) + xf^{(m)}(x), \qquad (\alpha);$$

presupunem că (α) este adevărată pentru $m \leqslant n - 1$ și să arătăm că este adevărată și pentru $m + 1$. Derivăm

$$g^{(m+1)}(x) = mf^{(m)}(x) + f^{(m)}(x) + xf^{(m+1)}(x),$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem

$$g^{(m+1)}(x) = (m+1)f^{(m)}(x) + xf^{(m+1)}(x).$$

Deci formula (α) este adevărată pentru $m = 1, 2, \ldots, n$.

64. Să se calculeze derivata de ordinul $n+1$ a funcției

$$f_n(x) = x^n \ln x, \quad x \in (0, +\infty).$$

R. Pentru $n = 1$ avem

$$f_1(x) = x \ln x, \qquad f_1'(x) = \ln x + 1, \qquad f_1''(x) = \frac{1}{x}.$$

Pentru $n = 2$, avem

$$f_2(x) = x^2 \ln x, \qquad f_2'(x) = 2x \ln x + x,$$

$$f_2''(x) = 2 \ln x + 3, \qquad f_2'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{x}.$$

Pentru $n = 3$, avem

$$f_3(x) = x^3 \ln x, \qquad f_3'(x) = 3x^2 \ln x + x^2,$$

$$f_3''(x) = 6x \ln x + 4x, \qquad f_3'''(x) = 6 \ln x + 10,$$

$$f_3''''(x) = \frac{3!}{x}.$$

Să observăm că pentru $m = 1, 2, 3$, avem

$$f_m^{(m+1)}(x) = \frac{m!}{x};$$

să arătăm că este adevărată pentru $m = n$. Presupunem că este adevărată până la $n-1$ și să arătăm că este adevărat și pentru n. Putem scrie

$$f_n(x) = xf_{n-1}(x),$$

iar dacă folosim rezultatul de la exercițiul precedent avem

$$f_n^{(n+1)}(x) = (n+1)f_{n-1}^{(n)}(x) + xf_{n-1}^{(n+1)}(x),$$

însă

$$f_{n-1}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}, \qquad f_{n-1}^{(n+1)}(x) = -\frac{(n-1)!}{x^2},$$

deci

$$f_n^{(n+1)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}(n+1-1) = \frac{n!}{x}, \qquad x > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

65. Se dau funcţiile.

a) $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in R,$

b) $\operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in R - \{0\}.$

1) Pe intervalele de monotonie să se determine funcţia inversă.
2) Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiilor inverse.

R. 1, a) Funcţia th este strict monotonă pe R (problema 9, cap. III) deci se poate inversa pe R. Reţinem că domeniul valorilor este $(-1, +1)$. Avem

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1},$$

sau

$$e^{2x}(1 - y) = 1 + y, \qquad e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y},$$

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}, \qquad y \in (-1, +1).$$

Funcţia

$$\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \quad x \in (-1, +1),$$

se numeşte „argument tangentă hiperbolică" şi este funcţia inversă a lui „tangentă hiperbolică".

2,a) $$(\operatorname{argth} x)' = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{1 - x^2}, \quad x \in (-1, +1),$$

$$(\operatorname{argth} x)'' = -\frac{1}{2} \frac{1!}{(1 + x)^2} + \frac{1}{2} \frac{1!}{(x - 1)^2}, \quad x \in (-1, +1),$$

şi în general, pe acelaşi interval,

$$(\operatorname{argth} x)^{(n)} = \frac{1}{2} (-1)^{n-1} \frac{(n - 1)!}{(1 + x)^n} + \frac{1}{2} (-1)^n \frac{(n - 1)!}{(x - 1)^n};$$

se demonstrează prin recurenţă. În adevăr, dacă mai derivăm odată, obţinem acelaşi rezultat în care se înlocuieşte n cu $n + 1$.

1,b) Funcţia

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in R - \{0\},$$

Scanned with OKEN Scanner

este strict monotonă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$ pe care mulțimea valorilor este $(-\infty, -1)$ și respectiv $(1, +\infty)$ (problema 9, cap. III). Avem pentru ramura $(0, +\infty)$

$$y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}, \quad e^{2x}(y - 1) = 1 + y,$$

deci

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{y + 1}{y - 1}, \quad y \in (1, +\infty). \tag{α}$$

Funcția

$$\operatorname{argcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}, \quad x \in (1, +\infty),$$

se numește „argument cotangentă hiperbolică" și este funcția inversă a lui „cotangentă hiperbolică" pe $(0, +\infty)$.

Pentru ramura $(-\infty, 0)$ (α) se scrie

$$x = -\frac{1}{2} \ln \frac{y - 1}{y + 1}, \quad y \in (-\infty, -1),$$

deci funcția

$$\operatorname{argcth} x = -\frac{1}{2} \ln \frac{x - 1}{x + 1}, \quad x \in (-\infty, -1),$$

este funcția inversă a lui cth pe intervalul $(-\infty, 0)$.

2, b) Avem

$$(\operatorname{argcth} x)' = \frac{1}{2} \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x - 1}, \quad x \in R - [-1, +1],$$

prin recurență se obține pe aceeași mulțime

$$(\operatorname{argcth} x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{1}{2} \frac{(n - 1)!}{(x + 1)^n} + (-1)^n \frac{1}{2} \frac{(n - 1)!}{(x - 1)^n},$$

formula valabilă pentru ambele ramuri.

66. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției

$$f(x) = \frac{1 + x}{\sqrt[3]{1 - 2x}}, \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

R. Avem

$$f(x) = (1 + x)(1 - 2x)^{-\frac{1}{3}},$$

$$f'(x) = (1 - 2x)^{-\frac{1}{3}} + 2\frac{1}{3}(1 + x)(1 - 2x)^{-\frac{4}{3}},$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{3}(1 - 2x)^{-\frac{4}{3}} + 2 \cdot \frac{1}{3}(1 - 2x)^{-\frac{4}{3}} +$$

$$+ 2^2 \cdot \frac{1}{3}\frac{4}{3} \cdot (1 + x)(1 - 2x)^{-\frac{7}{3}},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$f''(x) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}(1-2x)^{-\frac{4}{3}} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}(1+x)(1-2x)^{-\frac{7}{3}},$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}(1-2x)^{-\frac{7}{3}} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}(1-2x)^{-\frac{7}{3}} +$$

$$+ 2^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{3}(1+x)(1-2x)^{-\frac{10}{3}},$$

sau

$$f'''(x) = 3 \cdot 2^2 \frac{1 \cdot 4}{3^2}(1-2x)^{-\frac{7}{3}} + 2^3 \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3^3}(1+x)(1-2x)^{-\frac{10}{3}}.$$

observăm că putem scrie

$$f^{(n)}(x) = n \cdot 2^{n-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-5)}{3^{n-1}}(1-2x)^{-\frac{1}{3}-n+1} +$$

$$\alpha) \qquad + 2^n \cdot \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}{3^n}(1+x)(1-2x)^{-\frac{1}{3}-n}, \quad x \neq \frac{1}{2},$$

cel puţin pentru $n = 1, 2, 3$. Să arătăm că este adevărată pentru orice n. Folosim metoda inducţiei. Pentru aceasta este suficient să arătăm că relaţia (α) este adevărată şi pentru $n+1$. Mai derivăm odată

$$f^{(n+1)}(x) = n\,2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}{3^n}(1-2x)^{-\frac{1}{3}-n} +$$

$$+ 2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}{3^n}(1-2x)^{-\frac{1}{3}-n} +$$

$$+ 2^{n+1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n+1)}{3^{n+1}}(1+x)(1-2x)^{-\frac{1}{3}-n-1},$$

sau

$$f^{(n+1)}(x) = (n+1)\,2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}{3^n}(1-2x)^{-\frac{1}{3}-n} +$$

$$+ 2^{n+1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n+1)}{3^{n+1}}(1+x)(1-2x)^{-\frac{1}{3}-n-1}, \quad x \neq \frac{1}{2},$$

care este formula (α) cu n înlocuit cu $n+1$. Am arătat astfel că derivata de ordinul $n = 1, 2, \ldots$ este dată de (α).

Scanned with OKEN Scanner

61. Se dă matricea

$$A(x) = \begin{Vmatrix} e^x & e^{-x} \\ 1 & x \end{Vmatrix}, \quad x \in R,$$

şi se cere:

1) să se calculeze $A^3(x)$;

2) dacă $f(x) = \det(A(x))$ să se arate că

$$f^3(x) = \det(A^3(x));$$

3) să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei $f(x)$.

R. 1) Avem $A \times A \times A = A^3$; cubul unei matrice pătrate este tot o matrice pătrată

$$A \times A = \begin{Vmatrix} e & e^{-x} \\ 1 & x \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} e^x & e^{-x} \\ 1 & x \end{Vmatrix},$$

$$A \times A = \begin{Vmatrix} e^{2x} + e^{-x} & 1 + xe^{-x} \\ e^x + x & e^{-x} + x^2 \end{Vmatrix},$$

$$(A \times A) \times A = \begin{Vmatrix} e^{2x} + e^{-x} & 1 + xe^{-x} \\ e^x + x & e^{-x} + x^2 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} e^x & e^{-x} \\ 1 & x \end{Vmatrix}$$

$$A^3(x) = \begin{Vmatrix} e^{3x} + 2 + xe^{-x} & e^x + e^{-2x} + x + x^2e^{-x} \\ e^{2x} + xe^x + x^2 + e^{-x} & 1 + 2xe^{-x} + x^3 \end{Vmatrix}$$

2) Avem

$$f(x) = \det A = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ 1 & x \end{vmatrix} = xe^x - e^{-x}, \quad x \in R,$$

$$\det A^3 = \begin{vmatrix} e^{3x} + 2 + xe^{-x} & e^x + e^{-2x} + x + x^2e^{-x} \\ e^{2x} + xe^x + x^2 + e^{-x} & 1 + 2xe^{-x} + x^3 \end{vmatrix},$$

$$\det A^3 = (e^{3x} + 2 + xe^{-x})(1 + 2xe^{-x} + x^3) -$$

$$- (e^x + e^{-2x} + x + x^2e^{-x})(e^{2x} + xe^x + x^2 + e^{-x}) =$$

$$= e^{3x} + 2xe^{2x} + x^3e^{3x} + 2 + 4xe^{-x} + 2x^3 + xe^{-x} + 2x^2e^{-2x} + x^4e^{-x} -$$

$$- e^{3x} - xe^{2x} - x^2e^x - 1 - 1 - xe^{-x} - x^2e^{-2x} - e^{-3x} - xe^{2x} - x^2e^x -$$

$$- x^3 - xe^{-x} - x^2e^x - x^3 - x^4e^{-x} - x^2e^{-2x} =$$

$$= x^3e^{3x} - 3x^2e^x + 3xe^{-x} - e^{-3x} = (xe^x - e^{-x})^3,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\det (A^3) = (\det A)^3.$$

3) Avem

$$f(x) = xe^x - e^{-x}, \qquad x \in R,$$
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

unde

$$f_1(x) = xe^x, \quad f_2(x) = -e^{-x}, \quad x \in R;$$

ambele funcții au derivate de orice ordin pe R; prin recurență urmează că derivata de ordinul n a funcției f este

$$f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x + (-1)^{n+1} e^{-x}, \ x \in R.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

Reprezentări grafice. Discuţia grafică a ecuaţiilor. Funcţii hiperbolice.

Scanned with OKEN Scanner

1. Se dă funcţia

$$f(x) = \ln (1 + 4x^2),\ x \in R,$$

şi se cere:

1) să se stabilească intervalele de monotonie şi pe fiecare interval de monotonie să se determine funcţia inversă;

2) din graficul funcţiei date să se deducă graficul funcţiei inverse.

R. 1) Intervalele de monotonie sînt intervalele pe care funcţia este derivabilă şi derivata păstrează un semn constant. Funcţia dată este definită pe R, continuă şi derivabilă tot pe R,

$$f'(x) = \frac{8x}{1 + 4x^2},\ x \in R,\ f'(x) = 0,\quad x = 0.$$

Intervalele pe care $f'(x)$ păstrează un semn constant sînt $(-\infty, 0]$ şi $[0, +\infty)$, deci acestea sînt şi intervalele de monotonie ale funcţiei f. Punem

$$y = \ln (1 + 4x^2),$$

deci

$$1 + 4x^2 = e^y,\ x^2 = \frac{1}{4}(e^y - 1),$$

deci

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\sqrt{e^y - 1},\qquad y = [0, +\infty),$$

este funcţia inversă pe intervalul $[0, +\infty)$ şi $y \in [0, +\infty)$,

$$f^{-1}(y) = \frac{-1}{2}\sqrt{e^y - 1},$$

este funcţia inversă pe $(-\infty, 0]$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Avem $f(x) = 0$, $x = 0$,

$$f''(x) = \frac{8(1 + 4x^2) - 8x \cdot 8x}{(1 + 4x^2)^2} = \frac{8(1 - 4x^2)}{(1 + 4x^2)^2},$$

$$f''(x) = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Graficul funcției din enunț este dat în figura 14.

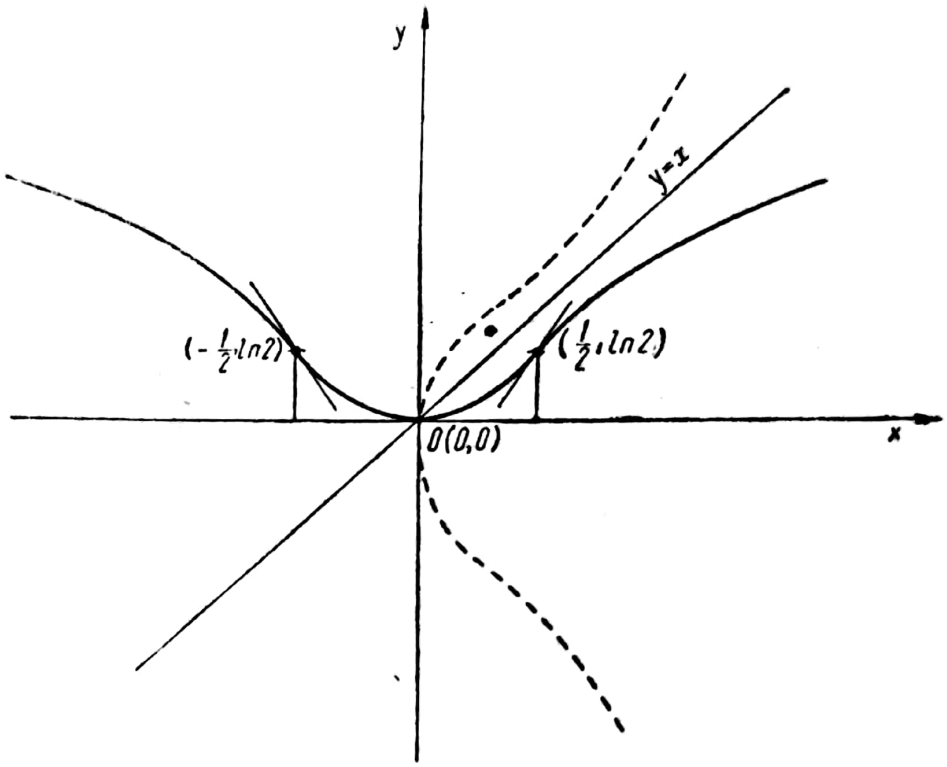


Fig. 14

Graficul funcțiilor

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{e^x - 1} \quad \text{și} \quad y = -\frac{1}{2}\sqrt{e^x - 1}, \quad x \in [0, \infty)$$

se obține din graficul funcției f prin simetrie față de prima bisectoare a axelor. Este trasat tot pe figura 14 punctat. Pentru $y = \frac{1}{2}\sqrt{e^x - 1}$ graficul este dat de linia punctată care pleacă din origine și este situată deasupra axei Ox.

2. Se dă

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - 2x^2}{x^2 + 4x + 4}}$$

1) să se determine mulțimile de definiție și de continuitate;
2) să se calculeze derivata funcției $f(x)$;
3) să se construiască graficul funcției $y = f^2(x)$.

1969 — Institutul Politehnic, Timișoara.

R. 1) Avem $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$, deci

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - 2x^2}}{|x + 2|},$$

trebuie să avem

$$1 - 2x^2 \geqslant 0, \text{ de unde } x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Mulțimea de definiție este $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, care este și mulțimea de continuitate a lui $f(x)$.

2) Calculăm derivata lui f

$$f'(x) = \left(\frac{1 - 2x^2}{x^2 + 4x + 4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-4x(x^2 + 4x + 4) - (2x + 4)(1 - 2x^2)}{(x + 2)^4},$$

sau

$$f'(x) = \frac{|x + 2|}{x + 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2x^2}} \cdot \frac{-4x - 1}{(x + 2)^2}.$$

Mulțimea de derivabilitate a lui f este $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3) Mulțimea de definiție a funcției

$$y = \frac{1 - 2x^2}{(x + 2)^2},$$

este $R - \{-2\}$.

Dreapta $x = -2$ este o asimptotă verticală. $y = 0$ pentru $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Calculăm derivata

$$y' = \frac{-4x(x^2 + 4x + 4) - (2x + 4)(1 - 2x^2)}{(x + 2)^4},$$

$$y' = 2\frac{-4x - 1}{(x + 2)^3}, \quad y' = 0, \quad x_1' = -\frac{1}{4}.$$

Graficul nu are asimptote oblice.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -2, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$$

dreapta $y = -2$ este o asimptotă orizontală.

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variaţie

x	$-\infty$				-2				$-\frac{1}{\sqrt{2}}$				$-\frac{1}{4}$				0				$\frac{1}{\sqrt{2}}$				$+\infty$
y	$-$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
y	-2	$\searrow$	$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	0		$\nearrow$		$\frac{2}{7}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$		$\searrow$	0		$\searrow$		-2				
											max														

Graficul este dat în figura 15.

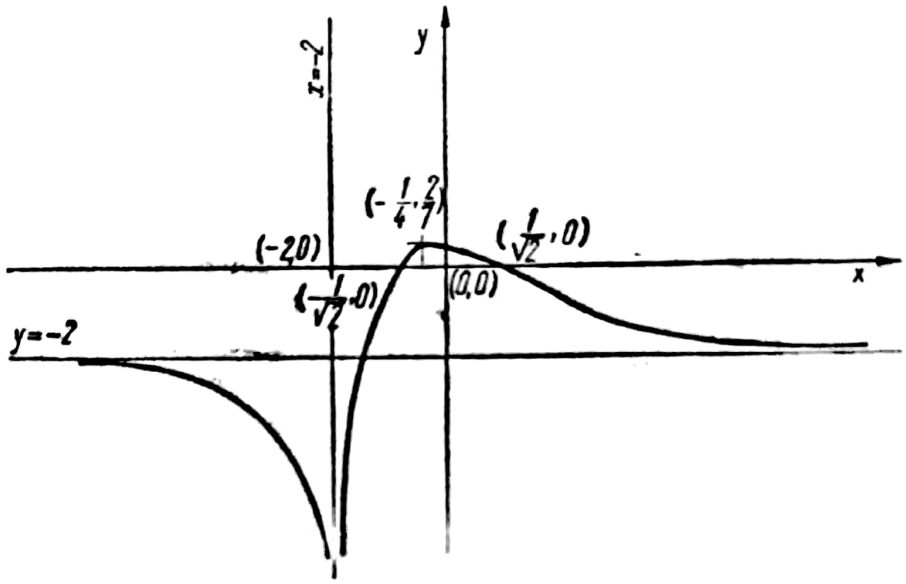


Fig. 15

3. Se dă

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}}$$

şi se cere

1) mulţimea de definiţie şi mulţimea de continuitate ;
2) să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic ;
3) să se arate că tangentele la grafic în punctele în care graficul taie axa Ox, sînt egale înclinate faţă de axa Oy ;
4) să se arate că graficul este simetric faţă de dreapta

$$2x - 3 = 0.$$

R. 1) Mulţimea de definiţie este R din care scoatem punctele pentru care $x^2 - 3x + 2 = 0$, adică punctele $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, deoarece radicalul există şi pentru valori negative. Mulţimea de continuitate este egală cu mulţimea de definiţie.

2) $f(x) = 0$ pentru

$$\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^2} - 1 = 0 \quad \text{sau} \quad x^2 - 3x + 2 = 1,\ x_1' = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}),$$

$$x_2' = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \quad \text{și} \quad x^2 - 3x + 2 = -1$$

care dă însă soluții imaginare.

Graficul are asimptotele verticale $x = 1$ și $x = 2$; nu are asimptote oblice.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x - 3}{\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^2}} + \frac{1}{3} \frac{2x - 3}{\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^4}},$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x - 3) \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^2} + 1}{\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^4}},$$

avem

$$y' = 0 \quad \text{pentru} \quad x_1'' = +\frac{3}{2}.$$

Tabloul de variație

x	$\infty -$	0	$\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$	$+\infty$
$f'(x$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$				$-\ -\ 0\ +$		$+\ +\ +\ +\ +$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{2}}$	$\searrow 0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow \frac{\sqrt[3]{16}-1}{\sqrt[3]{4}} \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$	
		A	B		$\min$ C		D	

Graficul este dat în figura 16.

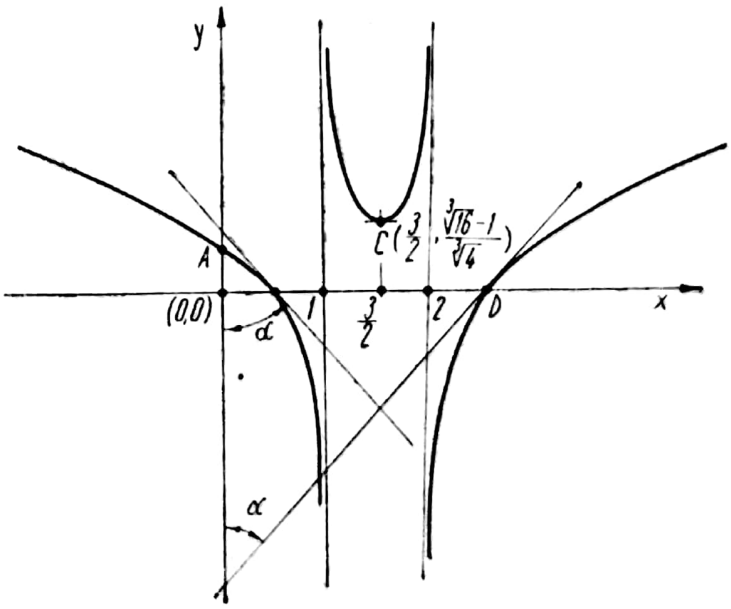


Fig. 16

3) Să calculăm valoarea derivatei în punctele de abscise $x_1 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ și $x_2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$. În aceste puncte avem $x^2 - 3x + 2 = 1$, deci

$$f'\left[\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\right] = \frac{1}{3}(3 - \sqrt{5} - 3) \cdot 2 = -\frac{2}{3}\sqrt{5},$$

$$f'\left[\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})\right] = \frac{1}{3}(3 + \sqrt{5} - 3) \cdot 2 = \frac{2}{3}\sqrt{5};$$

derivatele fiind egale și de semne contrare urmează că tangenta la grafic în punctul B face cu semiaxa Oy $(y > 0)$, același unghi pe care îl face tangenta la grafic în punctul D, cu semiaxa Oy', $(y' < 0)$.

4) Observăm că $f(x)$ se poate scrie în modul următor:

$$f(x) = \sqrt[3]{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}},$$

deci ia valori egale pentru $x - \frac{3}{2} = \pm\, a$.

4. Se dă funcția

$$f(x) = \sin x - \frac{x - 1}{x + 1}, \quad x \in R - \{-1\}$$

și se cere;

1) folosind graficul funcțiilor

$$f_1(x) = \sin x, \quad x \in R,$$

$$f_2(x) = \frac{x - 1}{x + 1}, \quad x \in R - \{-1\},$$

să se determine intervalele în care se află rădăcinile reale ale ecuație $f(x) = 0$;

2) să se arate că cea mai mică rădăcină pozitivă se găsește în intervalul $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$;

3) folosind teorema lui Rolle să se arate că ecuația:

$$\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{(x + 1)^2} = 0$$

are în intervalul $[2\pi, 3\pi]$ cel puțin o rădăcină reală.

1969 — Institutul Politehnic, București.

Scanned with OKEN Scanner

R. 1) *Graficul funcției* $f_1(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x \in R - \{-1\}$. $f_1(x) = 0$, $x = 1$; graficul admite asimptota verticală $x = -1$ și asimptota orizontală $y = 1$.

$$\lim_{x \to -1-0} f_1(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -1+0} f_1(x) = -\infty,$$

$$f_1'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}, \quad f_1'(x) > 0, \quad x \in R - \{-1\}.$$

Tabloul de variație:

x	$-\infty$				-1		0		$+1$			$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f_1(x)$	1		$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$		1

Reprezentăm pe același sistem de axe graficele celor două funcții în figura 17.

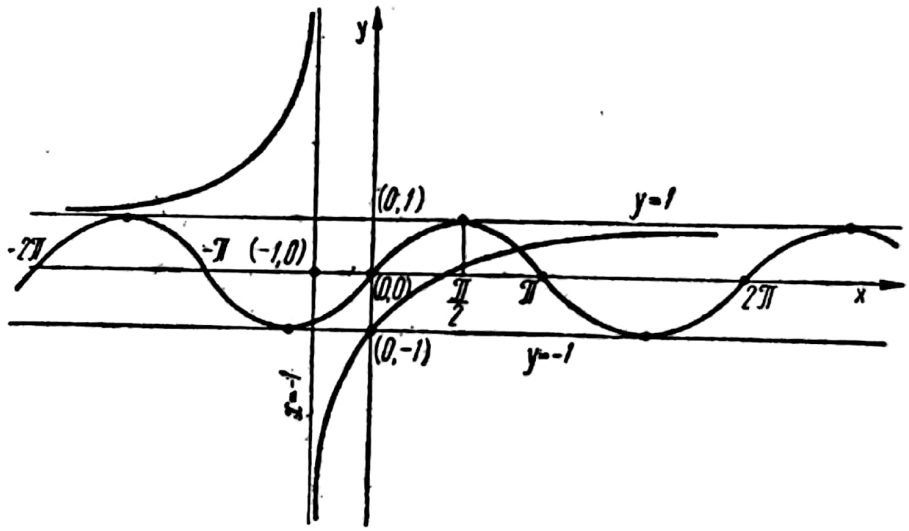


Fig. 17

Rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ sînt abscisele punctelor de intersecție ale graficelor lui $f_1(x)$ și $f_2(x)$, deci conform figurii 17 ecuația $f(x) = 0$ are numai rădăcini strict pozitive; mai precis $x_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $x_1 \in \left[2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, $x_1 \in \left[2\pi + \frac{\pi}{2}, 2\pi + \pi\right]$, ..., $x_k \in \left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, $x_k' \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi\right]$, ...

2) Pentru a restringe intervalul lui x_0 la $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ este suficient să arătăm că

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot f(\pi) < 0$$

deoarece se vede că în $[0, \pi]$ nu avem decît o singură rădăcină reală.

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{5\pi}{6} - 1}{\frac{5\pi}{6} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{5\pi - 6}{5\pi + 6} = \frac{18 - 5\pi}{10\pi + 12} > 0,$$

$$f(\pi) = -\frac{\pi - 1}{\pi + 1} < 0;$$

deci

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) f(\pi) < 0.$$

3) Fie x_1, x_1' rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ situate în intervalele $\left[2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ și $\left[2\pi + \frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$. În intervalul $[x_1, x_1'] \subset [2\pi, 3\pi]$, $f(x)$ îndeplinește condițiile teoremei lui Rolle deci există cel puțin un punct c în care $f'(c) = 0$. Dacă calculăm acum derivata lui $f(x)$ avem

$$f'(x) = \cos x - \frac{2}{(x+1)^3}, \quad x \in R - \{-1\},$$

deci $f'(x) = 0$ conduce la

$$\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{(x-1)^3} = 0;$$

prin urmare, conform celor spuse mai sus această ecuație admite cel puțin o rădăcină reală în intervalul $[2\pi, 3\pi]$.

5. Se dă

$$f(x) = |x|\, e^{\frac{1}{x-2}}$$

și se cere:

1) mulțimea de definiție și mulțimea de derivabilitate a lui $f(x)$,
2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția

$$y = f(x);$$

3) folosind graficul să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației:

$$f(x) = \lambda.$$

1970 — Institutul Politehnic, București

Scanned with OKEN Scanner

R. 1) Deoarece

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0, \\ -x, & \text{dacă } x < 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

rezultă că putem scrie

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x-2}}, & x \in (0, +\infty) - \{2\}, \\ 0, & x = 0, \\ -xe^{\frac{1}{x-2}}, & x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Pe intervalul $(0, +\infty)$ funcția nu este definită în punctul $x = 2$. Pe intervalul $(-\infty, 0)$ funcția este definită iar în punctul $x = 0$ ia valoarea 0; urmează ca mulțimea de definiție este $R - \{2\}$. Observăm că:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0-} f(x) = 0,$$

deci funcția este continuă pe mulțimea de definiție.

Pentru a stabili mulțimea de derivabilitate procedăm în modul următor: pe $(0, +\infty) - \{2\}$ funcția $f(x)$ este evident derivabilă fiind produsul a două funcții derivabile. În punctul $x = 2$ nu se pune problema derivabilității deoarece funcția nici nu este definită în acest punct. Pe $(-\infty, 0)$ funcția $f(x)$ este de asemenea derivabilă deoarece este produsul a două funcții derivabile.

Rămîne să cercetăm doar punctul $x = 0$;

$$f'(0+) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{xe^{\frac{1}{x-2}} - 0}{x} = e^{\frac{-1}{2}},$$

$$f'(0-) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-xe^{\frac{1}{x-2}} - 0}{x} = -e^{\frac{-1}{2}},$$

$f'(0+) \neq f'(0-)$ deci f nu este derivabilă în punctul $x = 0$. Mulțimea de derivabilitate este $R - \{0; 2\}$.

2) $f(x) = 0$, $x = 0$;

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} xe^{\frac{1}{x-2}} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} xe^{\frac{1}{x-2}} = 0.$$

Graficul admite asimptota verticală $x = 2$ pentru ramura situată la dreapta acestei drepte.

Scanned with OKEN Scanner

Asimptote oblice:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|e^{\frac{1}{x-2}}}{x} = 1, \quad m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|e^{\frac{1}{x-2}}}{x} = -1,$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(xe^{\frac{1}{x-2}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{(x-2)^2} e^{\frac{1}{x-2}}}{-\frac{1}{x^2}} = +1,$$

$$n' = \lim_{x\to-\infty} \left(-xe^{\frac{1}{x-2}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{x-2}}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{(x-2)^2} e^{\frac{1}{x-2}}}{-\frac{1}{x^2}} = -1.$$

Pentru înlăturarea nedeterminărilor am aplicat regula lui l'Hospital. Graficul admite două asimptote oblice, anume dreptele:

$$y = -x - 1 \quad \text{și} \quad y = x + 1,$$

pentru ramurile situate în semiplanele $x < 0$ și respectiv $x > 2$. Pe $(0, \infty) - \{2\}$ obținem:

$$f'(x) = \left(1 - \frac{x}{(x-2)^2}\right) e^{\frac{1}{x-2}} = \frac{x^3 - 5x + 4}{(x-2)^2} e^{\frac{1}{x-2}};$$

$$f'(x) = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4.$$

Pe $(-\infty, 0)$ avem

$$f'(x) = \left(-1 + \frac{x}{(x-2)^2}\right) e^{\frac{1}{x-2}} = -\frac{x^3 - 5x + 4}{(x-2)^2} e^{\frac{1}{x-2}};$$

pe $(-\infty, 0)$ nu se anulează $f'(x)$.
Tabloul de variație:

x	$-\infty$		0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$		$\|$	$+\ +\ 0\ -\ -$			$-\ -\ -\ 0\ +\ +\ +\ +$				
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$+\infty$] [	$\searrow$	$4e^{\frac{1}{2}}$	$\nearrow$ $+\infty$

Graficul este dat în figura 18.

Scanned with OKEN Scanner

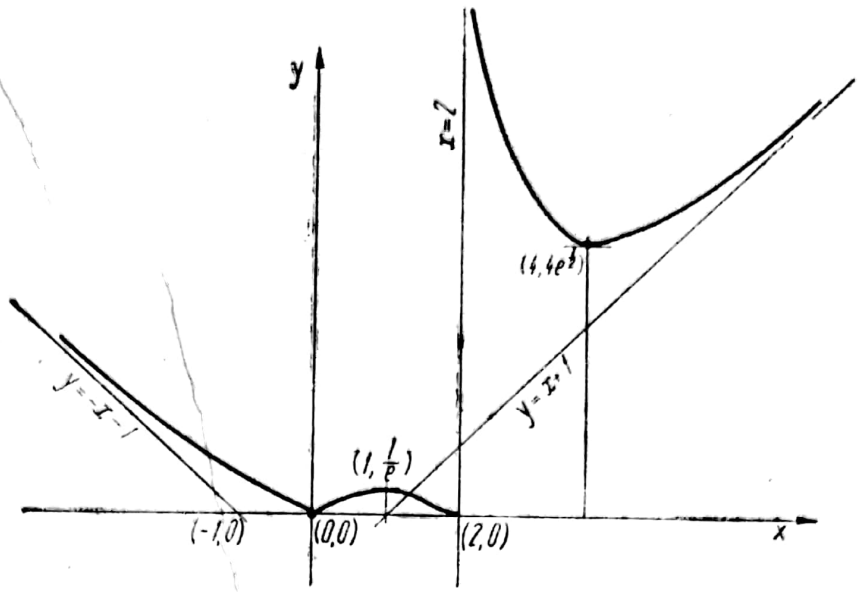


Fig. 18

Pe grafic se ține seama că $f'(2-0)=0$, $f'(0+)=\frac{1}{\sqrt{e}}$, $f'(0-)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3) Intersectînd graficul cu dreapta variabilă $y=\lambda$ obținem:

a) $+\infty > \lambda > 4e^{\frac{1}{2}}$, 3 rădăcini reale, 2 pozitive și una negativă,

b) $\lambda = 4e^{\frac{1}{2}}$, 3 rădăciii reale (una dublă $x=4$),

c) $4e^{\frac{1}{2}} > \lambda > \frac{1}{e}$, 1 rădăcină reală negativă,

d) $\lambda = \frac{1}{e}$, 3 rădăcini reale (una dublă $x=1$).

e) $\frac{1}{e} > \lambda > 0$, 3 rădăcini reale, una negativă și două pozitive; cînd $\lambda \to 0+$, două din rădăcini tind către zero și una către $+2$,

f) $\lambda < 0$, nici o rădăcină reală.

6. Să se studieze variația funcției $f(x)=\sqrt{x(x+2)^2}$ definită pentru $x \geqslant 0$ și să se traseze graficul acestei funcții.

1969 — Facultatea de matematică, București

R. Domeniul de definiție fiind $x \geqslant 0$, $f(x)=0$ pentru $x=0$. Nu are asimptote orizontale, verticale și oblice.

$$f'(x)=\frac{(x+2)^2+2x(x+2)}{2\sqrt{x(x+2)^3}}=\frac{(x+2)(3x+2)}{2\sqrt{x(x+2)^3}},\quad x \geqslant 0,\ f'(x)>0 \text{ pentru } x \geqslant 0.$$

Tabloul de variație

x	0							$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0			$\nearrow$				$+\infty$

avem $f'(0+) = +\infty$,

Graficul este dat în figura 19.

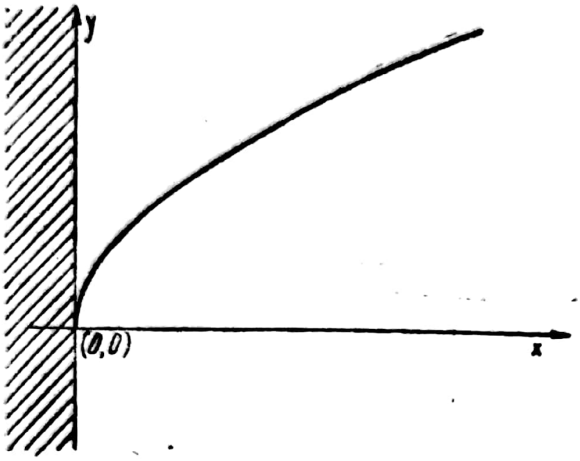


Fig. 19

7. Se dă polinomul:

$$f(x) = x^{p+q} - A\,(x^p - 1), \quad x \in R,$$

unde p, q sînt numere naturale impare iar $A > 0$. Se cere:

1) să se determine numărul A în cazul $p = 3$, $q = 1$ astfel încît tangenta în punctul de inflexiune, care are abscisa pozitivă, să facă un unghi de 135° cu direcția pozitivă a axei Ox;

2) să se traseze graficul funcției $f(x)$ pentru $p = 3$, $q = 1$, $A = 2$;

3) să se arate că ecuația $f(x) = 0$ are două rădăcini pozitive pentru

$$A > \sqrt[p]{\frac{(p+q)^{p+q}}{p^p q^q}}.$$

1969 — Institutul Politehnic, București.

R. 1) Pentru $p = 3$, $q = 1$, $f(x)$ devine

$$f(x) = x^4 - Ax^3 + A.$$

Punctele de inflexiune se obțin anulînd derivata a doua:

$$f'(x) = 4x^3 - 3Ax^2, \quad f''(x) = 12x^2 - 6Ax$$

$$f''(x) = 0, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{A}{2}.$$

Ca tangenta la grafic în punctul de abscisă $x_2 = \frac{A}{2}$ să facă cu Ox 135° trebuie

$$f'(x_2) = -1,$$

deci

$$\frac{1}{2}A^3 - \frac{3}{4}A^3 = -1,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă

$$A = \sqrt[4]{4}.$$

2) Pentru $p = 3$, $q = 1$, $A = 2$, $f(x)$ este

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2, \quad x \in R;$$

$f(x) = 0$, $x^4 - 2x^3 + 2 = 0$; cercetăm cu teorema lui Rolle dacă admite rădăcini reale:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2, \qquad f''(x) = 12x^2 - 12x,$$

$$f'(x) = 0, \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2},$$

$f(-\infty)$		$f(0)$		$f\left(\frac{3}{2}\right)$		$f(+\infty)$
+		+		+		+

deci graficul funcției nu întîlnește axa Ox.

Tabloul de variație

x	$-\infty$					0				1			$\frac{3}{2}$				$+\infty$
$f'(x)$	−	−	−	−	−	0	−	−	−		−	−	0	+	+	+	
$f''(x)$	+	+	+	+		0	−	−	−	0	+		+	+	+	+	
$f(x)$	$+\infty$		↘			2	↘			1	↘		$\frac{5}{16}$		↗		$+\infty$
						infl. A				infl. B			min C				

În punctul de inflexiune $B(1, 1)$ tangenta la grafic are panta -2 (fig. 20).

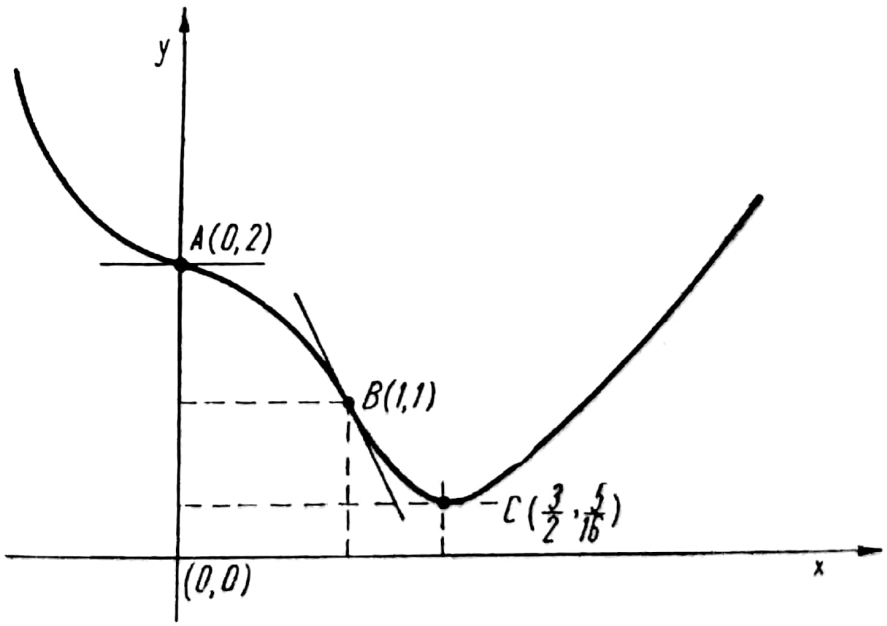


Fig. 20

3) Discutăm cu teorema lui Rolle ecuația

$$f(x) = x^{p+q} - Ax^p + A = 0;$$

$$f'(x) = (p+q)x^{p+q-1} - Apx^{p-1} = 0;$$

deci $f'(x) = 0$, $x_1 = 0$, (dacă $p > 1$) și

$$x_2 = \sqrt[q]{\frac{Ap}{p+q}} \text{ deoarece } q \text{ este impar și } A > 0.$$

Formăm șirul lui Rolle

$f(-\infty)$	$f(0)$	$f(x_2)$	$f(+\infty)$
+	+	C	+

$$\text{cu } C = \left(\frac{Ap}{p+q}\right)^{\frac{p+q}{q}} - A\left(\frac{Ap}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} + A,$$

și ecuația admite două rădăcini reale dacă $C < 0$,
sau

$$A^{\frac{p}{q}}\left[\left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p+q}{q}} - \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}}\right] + 1 < 0,$$

sau

$$-A^{\frac{q}{p}}\left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p+q}{q}} \cdot \frac{p}{q} + 1 < 0;$$

deci pentru

$$A > \frac{(p+q)^{\frac{p+q}{p}}}{p \cdot q^{\frac{q}{p}}} = \sqrt[p]{\frac{(p+q)^{p+q}}{p^p q^q}}$$

ecuația $f(x) = 0$ admite două rădăcini reale și pozitive.

8. Se dau funcțiile

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in R, \text{ (sinus hiperbolic)},$$

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in R, \text{ (cosinus hiperbolic)}$$

și se cere:

1) să se arate că există relațiile:
   a) $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$,

b) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$,
$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$;

c) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$,
$\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$,

2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic.

R. 1_a) Înlocuim pe ch x și sh x cu expresiile lor:

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{-2x} - e^{2x} + 2) = 1.$$

1_b) Este mai bine să înlocuim pe ch și sh în partea dreaptă a egalității

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,\frac{e^y - e^{-y}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}) =$$

$$= \frac{1}{4}(2e^{x+y} + 2e^{-x-y}) = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \operatorname{ch}(x+y).$$

Dacă observăm că $\operatorname{sh}(-y) = -\operatorname{sh} y$ rezultă imediat și a doua relație din 1_b).

1_c) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} =$

$$= \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}) =$$

$$= \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-x-y}) = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \operatorname{sh}(x+y).$$

A doua relație din 1_c) se arată în mod asemănător.

2_a) Funcția sinus hiperbolic este definită pe R. Avem $\operatorname{sh} x = 0$ pentru $e^x - e^{-x} = 0$ deci $x_1 = 0$.

Nu are asimptote orizontale, verticale și oblice.

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{ch} x > 0, \quad x \in R,$$

funcția ch x nu se anulează pe R.

$$(\operatorname{sh} x)'' = \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{sh}''(x) = 0, \quad x_1' = 0.$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$						0						$+\infty$
$\operatorname{sh}' x$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
$\operatorname{sh}'' x$	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	
$\operatorname{sh} x$	$-\infty$		↗				0		↗				$+\infty$

Graficul funcției sh x este dat în figura 21.

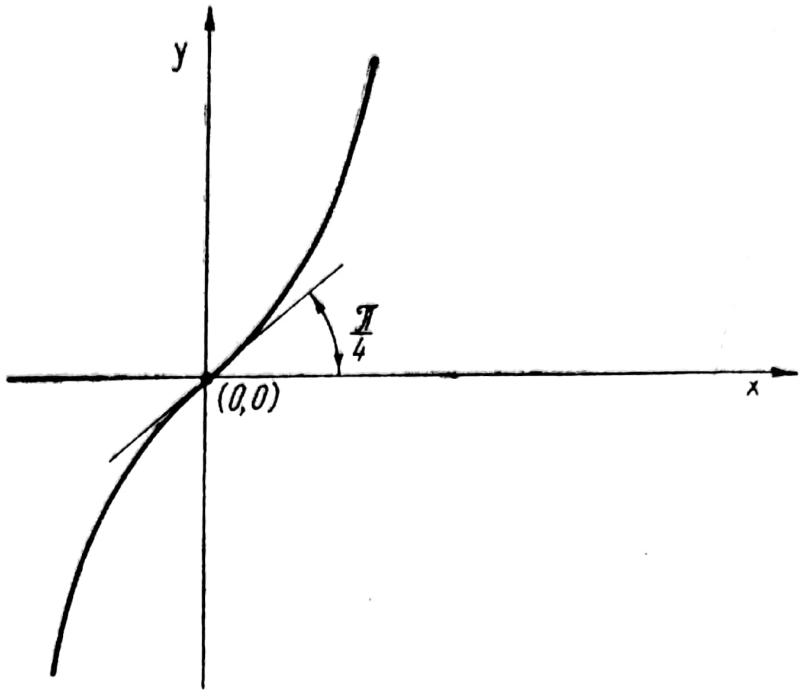


Fig. 21

Observăm că sh $(-x) = -\operatorname{sh} x$ deci este o funcție impară. Tot din grafic mai deducem că sh x este strict crescătoare pe domeniul de definiție.

2_b) Funcția cosinus hiperbolic este definită pe R. Pentru ch $x = 0$, nu există valori ale lui x. Graficul nu admite asimptote orizontale, verticale sau oblice.

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{ch}'(x) = 0, \qquad \operatorname{sh} x = 0, \qquad x_1 = 0$$

$\operatorname{ch}''(x) = \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch} x$; observăm că ch $x > 0$ pe R.

Tabloul de variație

x	$-\infty$					0					$+\infty$
$\operatorname{ch}' x$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$\operatorname{ch}'' x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
ch x	$+\infty$	↘				1 minim			↗		$+\infty$

Graficul este dat în figura 22.

Avem ch $(-x) = \text{ch}\, x$ deci ch x este o funcție pară. Funcția ch x este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.

9. Se dau funcțiile

$\text{th}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, (tangentă hiperbolică),

$\text{cth}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, (cotangentă hiperbolică),

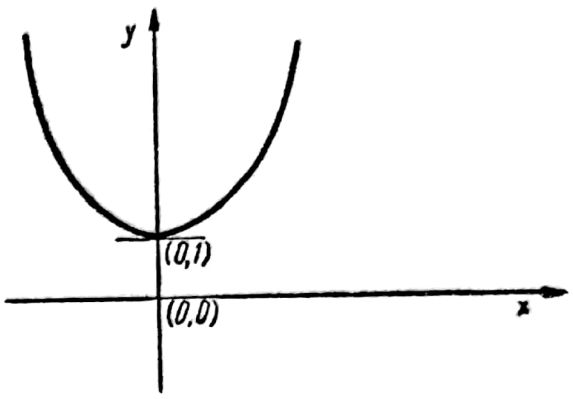


Fig. 22

și se cere:

1) să se stabilească mulțimea de definiție;

2) să se arate că există relațiile:

a) $\text{th}\,(x + y) = \dfrac{\text{th}\, x + \text{th}\, y}{1 + \text{th}\, x\, \text{th}\, y}$,

$\text{th}\,(x - y) = \dfrac{\text{th}\, x - \text{th}\, y}{1 - \text{th}\, x\, \text{th}\, y}$,

b) $\text{cth}(x + y) = \dfrac{\text{cth}\, x\, \text{cth}\, y + 1}{\text{cth}\, y + \text{cth}\, x}$,

$\text{cth}(x - y) = \dfrac{\text{cth}\, x\, \text{cth}\, y - 1}{\text{cth}\, y - \text{cth}\, x}$;

3) să se studieze variația și să se reprezinte grafic.

R. 1) Observăm că se poate scrie:

$$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}, \qquad \text{cth}\, x = \frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x},$$

de unde rezultă imediat că mulțimea de definiție a funcției th este R iar a funcției cth este $R - \{0\}$, dacă ținem seama de studiul funcțiilor ch și sh făcut la exercițiul precedent.

2_a) Deoarece avem

$$\text{th}\,(x + y) = \frac{\text{sh}(x + y)}{\text{ch}(x + y)},$$

folosim expresiile lui sh $(x + y)$ și ch $(x + y)$. Avem

$$\text{th}\,(x + y) = \frac{\text{sh}\, x\, \text{ch}\, y + \text{ch}\, x\, \text{sh}\, y}{\text{ch}\, x\, \text{ch}\, y + \text{sh}\, x\, \text{sh}\, y},$$

iar dacă împărțim cu $\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y$ rezultă

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y};$$

observăm că $\operatorname{th}(-x) = \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$,

de unde rezultă imediat că

$$\operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$

2_b) În mod analog putem scrie

$$\operatorname{cth}(x+y) = \frac{\operatorname{ch}(x+y)}{\operatorname{sh}(x+y)},$$

deci

$$\operatorname{cth}(x+y) = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y + 1}{\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} y};$$

funcția $\operatorname{cth} x$ este impară deoarece

$$\operatorname{cth}(-x) = \frac{\operatorname{ch}(-x)}{\operatorname{sh}(-x)} = -\operatorname{cth} x;$$

folosind acest rezultat obținem imediat și a doua relație de la 2_b).

3_a) Funcția $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $x \in R$,

se anulează pentru $x = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1,$$

graficul admite asimptotele orizontale $y = 1$ și $y = -1$, nu admite asimptote verticale și asimptote oblice.

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2},$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{th} x)' > 0, \quad x \in R,$$

$$(\operatorname{th} x)'' = \frac{-2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{th} x)'' = 0, \quad x_1 = 0.$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$			0					$+\infty$
$\operatorname{th}' x$	$+$	$+$	$+$		$+$		$+$		
$\operatorname{th}'' x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\operatorname{th} x$	-1	↗		0		↗			$+1$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul este dat în figura 23.

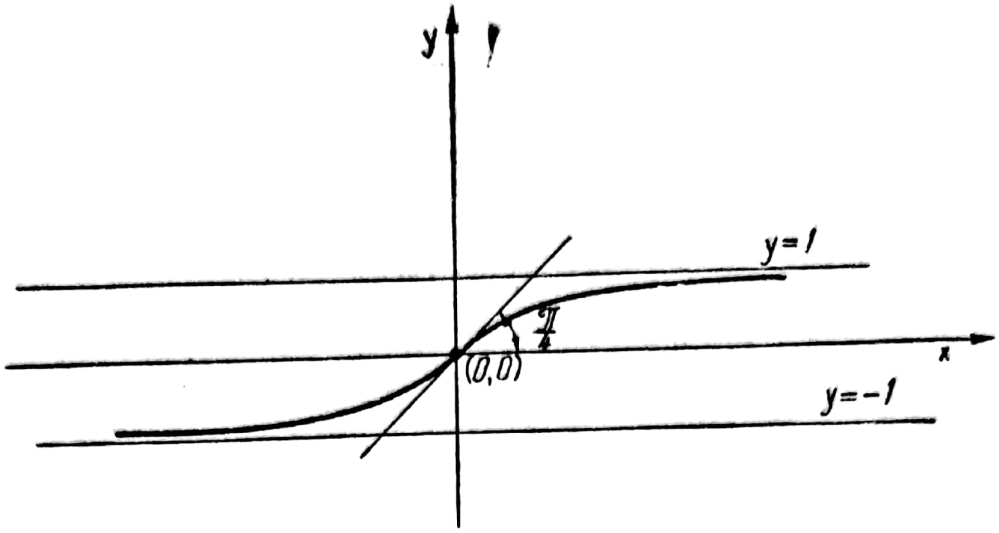


Fig. 23

Din grafic rezultă că:

$$-1 < \operatorname{th} x < +1, \quad x \in R.$$

3_b) Funcția

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

are domeniul de definiție $R - \{0\}$. Nu există valori ale lui x pentru care $\operatorname{cth} x = 0$, deci graficul nu taie axa Ox. Avem

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{cth} x = -1, \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{cth} x = +1$$

prin urmare graficul admite asimptotele orizontale $y = -1$ și $y = +1$;

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} < 0, \; x \in R - \{0\},$$

$$(\operatorname{cth} x)'' = \frac{2\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^3 x}, \quad x \in R - \{0\}.$$

Avem $\lim_{x \to 0-} \operatorname{cth} x = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0+} \operatorname{cth} x = +\infty.$

Tabloul de variație

x	$-\infty$					0					$+\infty$
$\operatorname{cth}' x$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$\operatorname{cth}'' x$	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	
$\operatorname{cth} x$	-1		↘		$-\infty$	$+\infty$		↘			$+1$

Graficul este dat în figura 24.

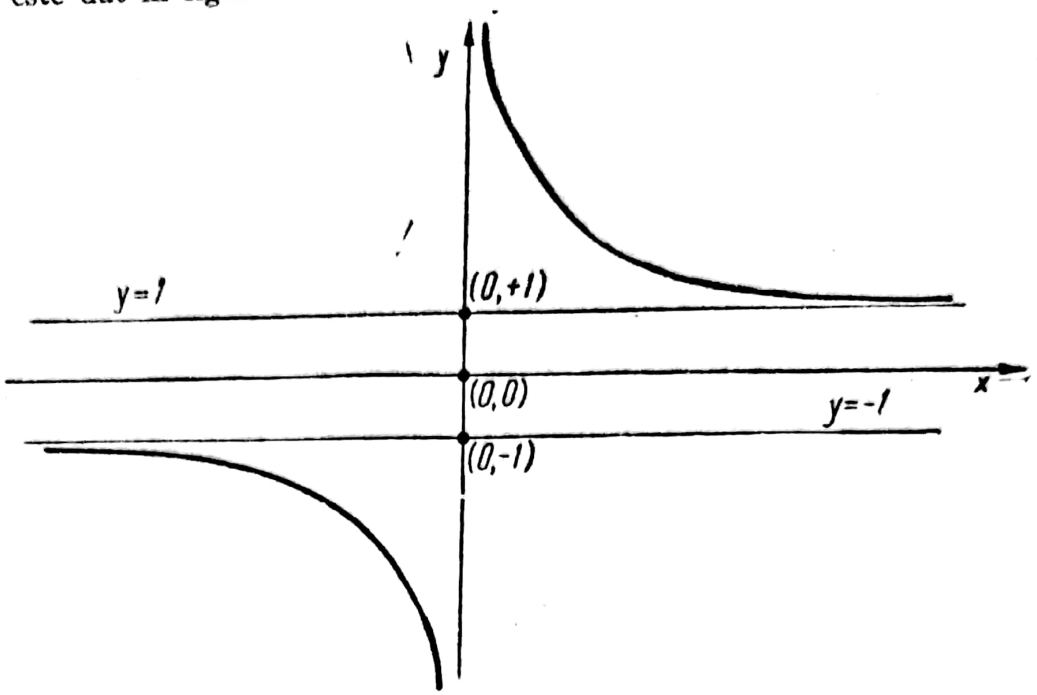


Fig. 24

10. Se dă funcția definită pe axa reală prin

$$f(x) = c_1\sqrt{a^2 + x^2} + c_2\,|b - x|,$$

$$c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad b > 0. \quad \text{Se cere:}$$

1) să se găsească asimptotele la graficul funcției;
2) să se studieze variația funcției.

1969 — Facultatea de matematică, București.

R. 1) Deoarece $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, rezultă că f nu se anulează pentru nici o valoare a lui x, deci graficul nu întîlnește axa Ox. Asimptote oblice

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = c_1 + c_2, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -c_1 - c_2,$$

deci există două direcții asimptotice $m_1 = c_1 + c_2$, $m_2 = -c_1 - c_2$;

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (c_1 + c_2)x] = \lim_{x\to+\infty} [c_1(\sqrt{a^2 + x^2} - x)] + \lim_{x\to+\infty} c_2(x - b - x) = -c_2 b,$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) + (c_1 + c_2)x] = \lim_{x\to-\infty} [c_1(\sqrt{a^2 + x^2} + x)] + \lim_{x\to-\infty} c_2[b - x + x] = c_2 b.$$

Graficul admite asimptotele oblice:

$$D_1: y = (c_1 + c_2)x - c_2 b, \qquad \text{(ramura } +\infty),$$

$$D_2: y = -(c_1 + c_2)x + c_2 b, \qquad \text{(ramura } -\infty).$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Avem:

$$f(x) = \begin{cases} c_1\sqrt{a^2+x^2} + c_2(b-x), & x < b, \\ c_1\sqrt{a^2+x^2} + c_2(x-b), & x > b, \\ c_1\sqrt{a^2+b^2}, & x = b. \end{cases}$$

Calculăm derivata lui $f(x)$

$$f'(x) = \frac{c_1 x}{\sqrt{a^2+x^2}} - c_2, \qquad x < b,$$

$$f'(x) = \frac{c_1 x}{\sqrt{a^2+x^2}} + c_2, \qquad x > b.$$

Funcția f nu este derivabilă în punctul b deoarece

$$f'(b-0) = \frac{c_1 b}{\sqrt{a^2+b^2}} - c_2, \quad f'(b+0) = \frac{c_1 b}{\sqrt{a^2+b^2}} + c_2$$

și $f'(b-0) \neq f'(b+0)$;

$$f'(x) = 0,\ x < b,\ c_1 x = c_2\sqrt{a^2+x^2};\quad x = \pm\sqrt{\frac{c_2^2 a^2}{c_1^2 - c_2^2}},\ x < b,$$

deci dacă $c_1 \leqslant c_2$, nu avem soluții; dacă $c_1 > c_2$ și $\frac{c_2|a|}{\sqrt{c_1^2-c_2^2}} < b$, derivata se anulează pentru $x_1 = +\frac{c_2|a|}{\sqrt{c_1^2-c_2^2}}$;

dacă $c_1 > c_2$ și $\frac{c_2|a|}{\sqrt{c_1^2-c_2^2}} > b$, derivata pe intervalul $x < b$ nu se anulează;

$f'(x) = 0,\ x > b$, nu sînt soluții.

Tabloul de variație:

I) $0 < c_1 < c_2$,

x	$-\infty$					0				b					$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$				$c_1\lvert a\rvert + c_2 b$ B	$\searrow$			$c_1\sqrt{a^2+b^2}$ A	$\nearrow$				$+\infty$

Graficul este dat în figura 25.

II) $c_1 > c_2 > 0$, $\frac{c_2|a|}{\sqrt{c_1^2-c_2^2}} < b$,

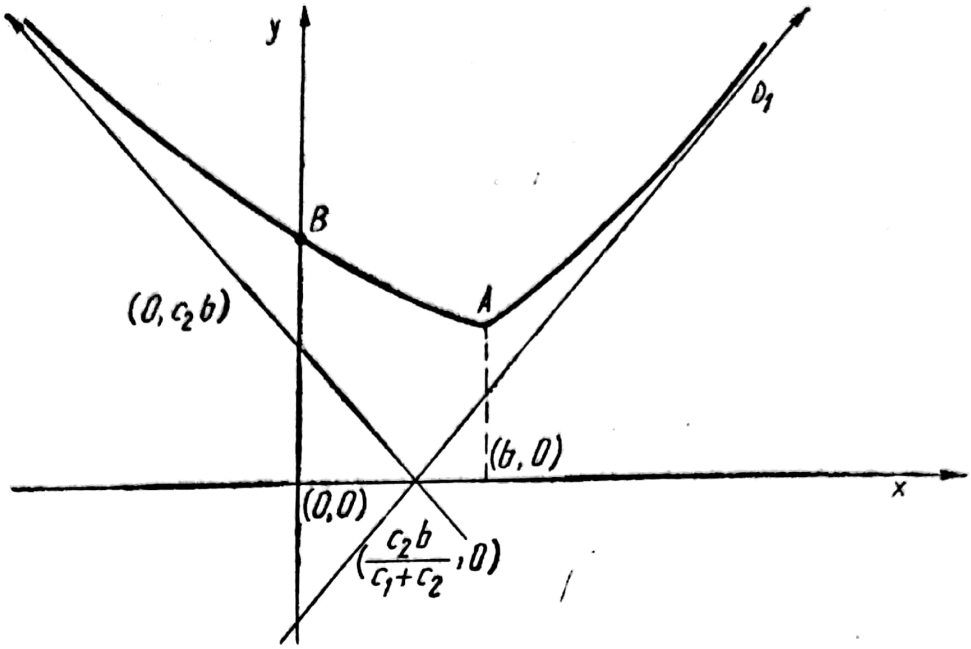


Fig. 25

x	$-\infty$		0		$\frac{c_2\lvert a\rvert}{\sqrt{c_1^2-c_2^2}}$		b		$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$				0	$+$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$c_1\lvert a\rvert + c_2 b$ (B)	$\searrow$	α (C)	$\nearrow$	$c_1\sqrt{a^2+b^2}$ (A)	$\nearrow$	$+\infty$

$$\alpha = f\left(\frac{c_2|a|}{\sqrt{c_1^2-a_2^2}}\right) = c_1\sqrt{\frac{a^2c_1^2}{c_1^2-c_2^2}} + c_2\left(b - \frac{c_2|a|}{\sqrt{c_1^2-c_2^2}}\right).$$

Graficul este dat în figura 26.

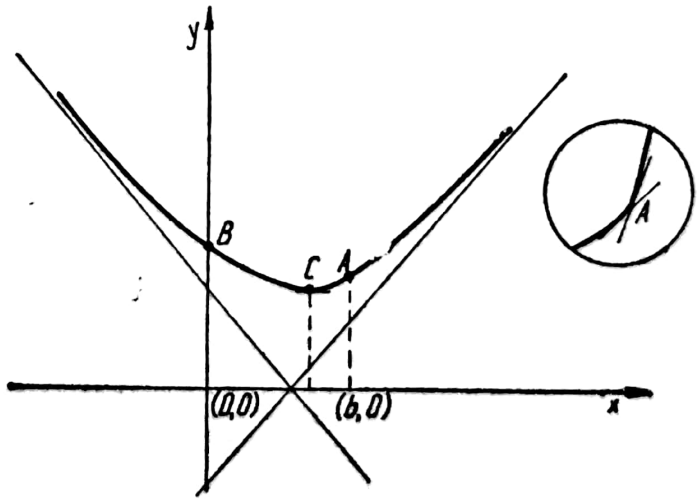


Fig. 26

Graficul pentru cazul cînd $c_1 > c_2$ şi $\frac{c_1|a|}{\sqrt{c_1^2 - a_2^2}} > b$, este analog cu cel din figura 25 de la primul caz studiat.

11. Se dă funcţia

$$f(x) = \cos x \, e^{\sin^2 x} \in R,$$

şi se cere:

1 să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic;

2) să se arate că graficul nu admite tangente cu panta mai mare decît e;

3) să se calculeze:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x f(x) \, dx.$$

R. 1) Domeniul de definiţie al lui f este R. Deoarece f este periodică de perioada 2π, vom studia variaţia pe $[0, 2\pi]$, prelungind apoi rezultatul pe R. Mai observăm că funcţia dată este mărginită deoarece $\sin x$ şi $\cos x$ sînt mărginite pe R. Avem succesiv:

$$f(x) = 0, \ \cos x = 0, \ x_1 = \frac{\pi}{2}, \ x_2 = \frac{3\pi}{2},$$

$$f'(x) = -\sin x \, e^{\sin^2 x} + 2 \sin x \cos^2 x \, e^{\sin^2 x} = \sin x (2\cos^2 x - 1) e^{\sin^2 x},$$

deci $f'(x) = 0$ pentru $\sin x = 0$, $2\cos^2 x - 1 = 0$, cu

$$x_1' = 0, \ x_2' = \pi, \ x_3' = 2\pi, \ x_4' = \frac{\pi}{4}, \ x_5' = \frac{3\pi}{4}, \ x_6' = \frac{5\pi}{4} \text{ şi } x_7' = \frac{7\pi}{4}.$$

Graficul nu are asimptote verticale, orizontale şi oblice. Deoarece $f'(x)$ este definită tot pe R, graficul are tangentă în fiecare punct al său.

Tabloul de variaţie

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f'(x)$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}$	$\searrow$	1
	A		B				C		D		E				F		G

Scanned with OKEN Scanner

Graficul pe $[0, 2\pi]$ este dat în figura 27.

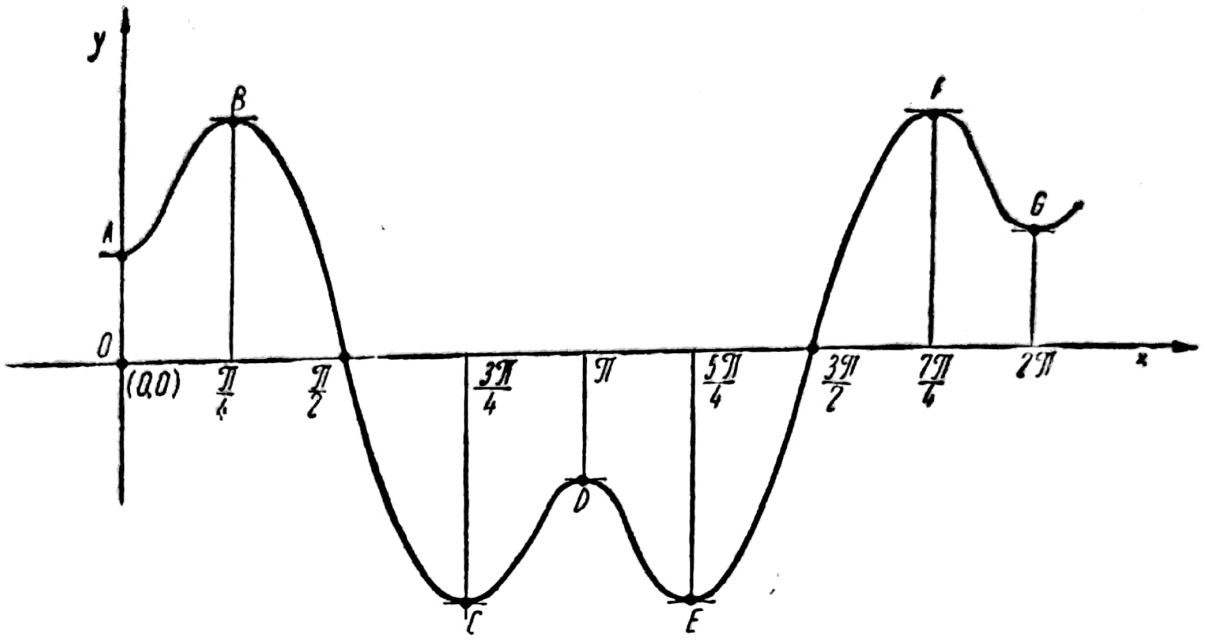


Fig. 27

Graficul pe R este dat în figura 28.

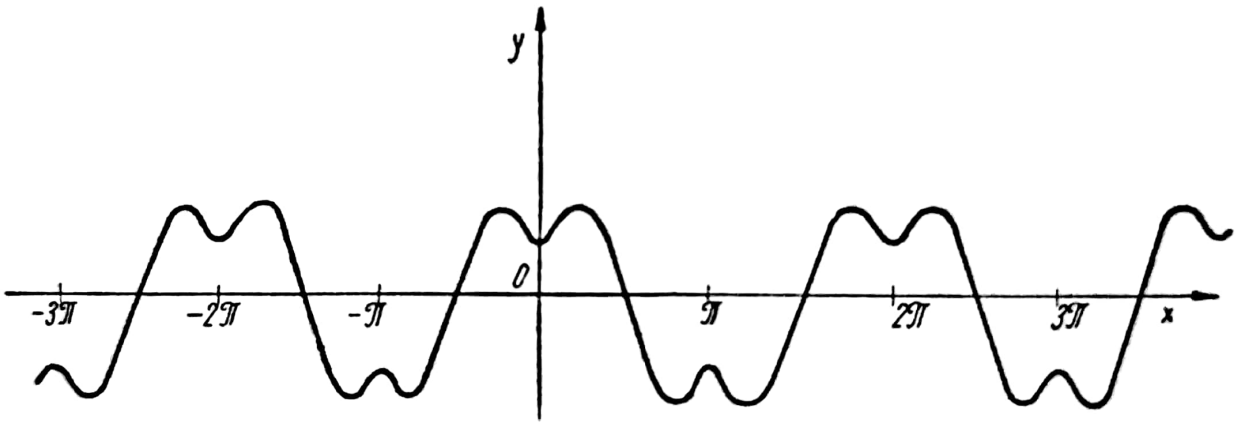


Fig. 28

2) Pentru a rezolva punctul 2 al problemei este suficient a arăta că:

$$f'(x) < e, \qquad x \in R.$$

Avem:

$$|f'(x)| = |\sin x\,(2\cos^2 x - 1)e^{\sin^2 x}| = |\sin x|\,|2\cos^2 x - 1|\,e^{\sin^2 x}$$

însă $|\sin x| \leqslant 1$, $|2\cos^2 x - 1| \leqslant 1$, $e^{\sin^2 x} \leqslant e$, $x \in R$, deci

$$|f'(x)| \leqslant e, \qquad x \in R.$$

Din calculele făcute mai rezultă că $-e \leqslant f'(x) \leqslant e$, $x \in R$.

Scanned with OKEN Scanner

3) Avem de calculat integrala definită

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, e^{\sin^2 x} dx ;$$

observăm că $2 \sin x \cos x \, dx = d(\sin^2 x)$ deci se recomandă schimbarea de variabilă $\sin^2 x = u$. Noile limite ale integralei vor fi 0 şi 1. Putem scrie

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 u e^u du$$

integrală pe care o calculăm prin părţi: $u = \alpha$, $e^u du = d\beta$, $d\alpha = du$, $\beta = e^u$, deci

$$I = \frac{1}{2} u e^u \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^u du = \frac{1}{2} \left[u e^u - e^u \right]_0^1 = \frac{1}{2} .$$

12. Se dă

$$f(x) = (x^4 - 3x^2 + 3)^{\frac{1}{3}} + (x^4 - 3x^2 + 3)^{-\frac{1}{3}}$$

şi se cere:

1) mulţimile de definiţie, de continuitate şi derivabilitate;

2) să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic;

3) să se rezolve ecuaţia $f(x) = 2$.

R. 1) Avem $x^4 - 3x^2 + 3 = \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $x \in R$, deci mulţimea de definiţie este R. Mulţimea de definiţie este şi mulţimea de continuitate şi derivabilitate.

2) Putem scrie

$$f(x) = \frac{(x^4 - 3x^2 + 3)^{\frac{2}{3}} + 1}{(x^4 - 3x^2 + 3)^{\frac{1}{3}}} > 0 \text{ pe } R,$$

deci graficul funcţiei f nu taie axa Ox. Nu avem asimptote verticale, orizontale şi oblice.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{4x^3 - 6x}{(x^4 - 3x^2 + 3)^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{3} \frac{4x^3 - 6x}{(x^4 - 3x^2 + 3)^{\frac{4}{3}}} ,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{4x^3 - 6x}{(x^4 - 3x^2 + 3)^{\frac{4}{3}}} \left[(x^4 - 3x^2 + 3)^{\frac{2}{3}} - 1 \right];$$

$$f'(x) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = + \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x_3 = - \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ și}$$

$$(x^4 - 3x^2 + 3)^{\frac{2}{3}} = 1, \text{ sau } x^4 - 3x^2 + 3 = + 1,$$

$$x_4 = - 1, \qquad x_5 = + 1,$$

$x_6 = - \sqrt{2}$, $x_7 = \sqrt{2}$; cazul $x^4 - 3x^2 + 3 = - 1$, conduce la rădăcini imaginare.

Tabloul de variație

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		-1		0		$+1$		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
			min A		max B		min C		max		min C'		max B'		min A'		

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \simeq 2{,}01, \quad f(0) \simeq 2{,}13.$$

Graficul este dat în figura 29.

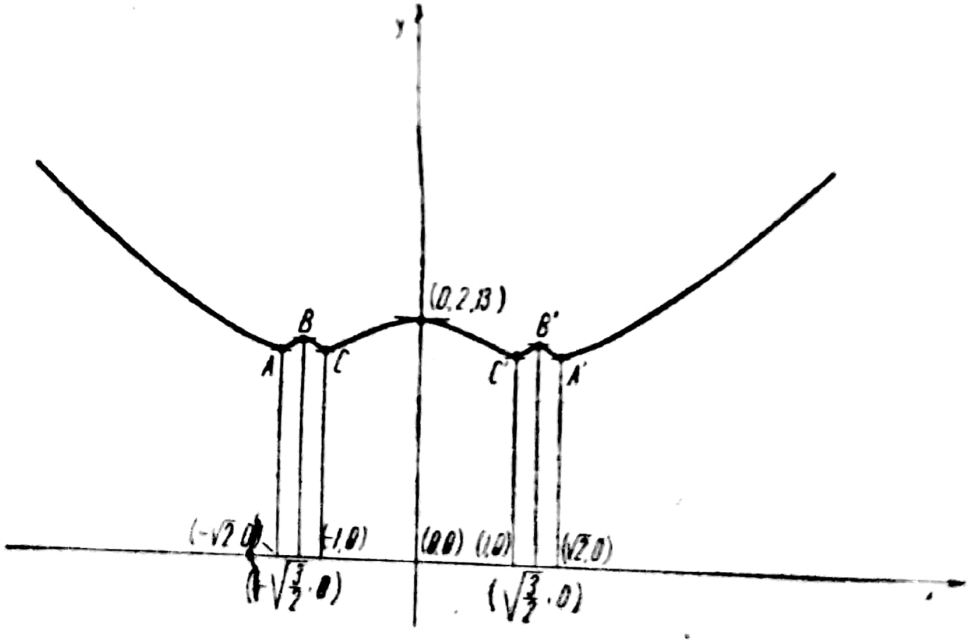


Fig. 29

Graficul este simetric față de axa Oy deoarece f este o funcție pară.

3) Trebuie să avem

$$(x^4 - 3x^2 + 3)^{\frac{1}{3}} + (x^4 - 3x^2 + 3)^{-\frac{1}{3}} = 2,$$

sau

$$(x^4 - 3x^2 + 3)^{\frac{2}{2}} - 2(x^4 - 3x^2 + 3)^{\frac{1}{3}} + 1 = 0,$$

sau

$$\left[(x^4 - 2x^2 + 3)^{\frac{1}{3}} - 1\right]^2 = 0,$$

de unde rezultă ecuația:

$$(x^4 - 3x^2 + 3)^{\frac{1}{3}} = 1, \quad \text{sau} \quad x^4 - 3x^2 + 3 = 1$$

rezolvată la punctul 2. Avem soluțiile

$$x_1' = -1, \quad x_2' = +1, \quad x_1'' = \sqrt{2}, \quad x_2'' = -\sqrt{2},$$

care pot fi deduse cu ușurință și din grafic.

Tot din grafic mai rezultă că ecuația $f(x) = a$ cu $a < 2$ nu are nici o rădăcină reală.

13. 1) Să se rezolve ecuația

$$\arccos x + \arccos (1 - x) = \arccos (-x).$$

2) Să se studieze variația funcției

$$f(x) = \arccos x + \arccos (1 - x) - \arccos (-x)$$

și să se schițeze graficul.

3) Să se scrie ecuațiile tangentelor la graficul precedent în punctele de intersecție cu axa Ox și în punctul de abscisă $x = 1$.

1968. Fac. de matemat., mecanică, Buc.

R. 1) Dacă notăm

$$a = \arccos u, \qquad b = \arccos v,$$

$$u = \cos a, \qquad v = \cos b,$$

avem

$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = uv - \varepsilon\sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - v^2}$ cu $\varepsilon = \pm 1$, de unde

$$a + b = \arccos (uv - \varepsilon\sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - v^2});$$

Scanned with OKEN Scanner

aplicînd acest rezultat obținem

$$\arccos x + \arccos(1-x) = \arccos\left[x(1-x) - \varepsilon\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-x)^2}\right],$$

deci ecuația de la punctul 1, devine

$$\arccos\left[x(1-x) - \varepsilon\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-x)^2}\right] = \arccos(-x),$$

sau

$$x(1-x) - \varepsilon\sqrt{1-x^2}\sqrt{x(2-x)} = -x, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

sau

$$x(2-x) = \varepsilon\sqrt{1-x^2}\sqrt{x(2-x)},$$

cu soluțiile în $[-1, +1]$:

$$x_1 = 0,$$

$$x(2-x) = 1 - x^2 \quad \text{deci} \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

2) Mulțimea de definiție a funcției f este $[0, 1]$ deoarece

$$-1 \leqslant x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant 1-x \leqslant +1;$$

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2};$$

luăm pentru arccos determinarea principală cu mulțimea valorilor $[0, \pi]$.

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}, \quad x \in (0, 1);$$

$$f'(x) = 0, \quad 2\sqrt{x(2-x)} = \sqrt{1-x^2}, \quad 4x(2-x) = 1 - x^2$$

sau

$$3x^2 - 8x + 1 = 0, \quad x' = \frac{1}{3}(4 - \sqrt{13}),$$

$x_2' = \frac{1}{3}(4 + \sqrt{13})$; singura soluție acceptabilă $x_1' = \frac{1}{3}(4 - \sqrt{13})$.

Tabloul de variație

x	0		$\frac{4-\sqrt{13}}{3}$		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	a (A)	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

$$a = f\left(\frac{4-\sqrt{13}}{3}\right) = \arccos\frac{4-\sqrt{13}}{3} + \arccos\frac{\sqrt{13}-1}{3} - \arccos\frac{\sqrt{13}-4}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul este dat în figura 30.

3) În punctul $x = 0$, ecuația tangentei este $x = 0$, deoarece $f'(0 +) = + \infty$. În punctul $x = \frac{1}{2}$ ecuația tangentei este

$$y = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

deoarece

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

În punctul $x = 1$ ecuația tangentei la grafic este $x = 1$ deoarece în acest punct $f'(1 - 0) = -\infty$.

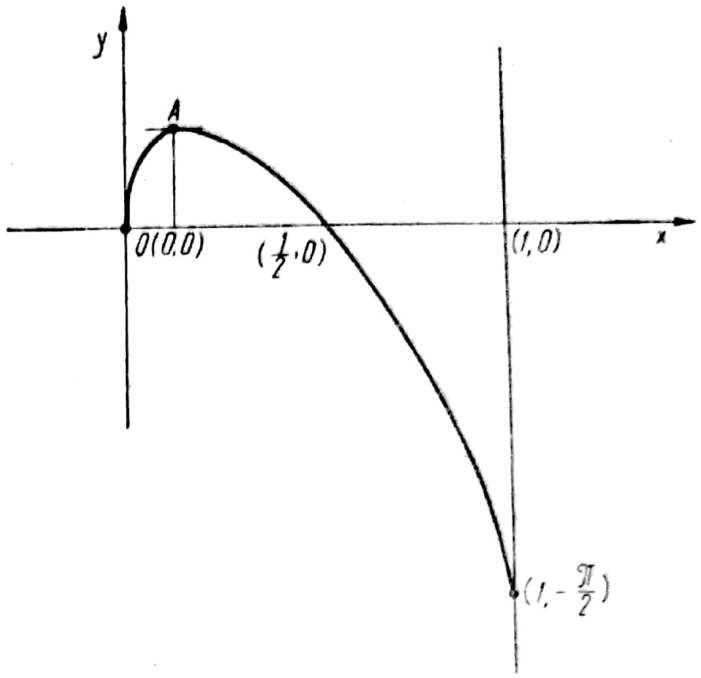


Fig. 30

14. Se dă funcția $f(x) = (\sin x + \cos x)\, e^{\sin x - \cos x}$ $x \in R$, și se cere:

1) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;

2) să se arate că $f'(x)$ este mărginită. Să se găsească o majorantă a lui $f'(x)$.

R. 1) Mulțimea de definiție este R. f este o funcție periodică de perioadă 2π. O vom studia pe $[0, 2\pi]$, apoi vom extinde rezultatul pe R.

$$f(x) = 0,\ \sin x + \cos x = 0,\quad x_1 = \frac{3\pi}{4},\quad x_2 = \frac{7\pi}{4}.$$

Funcția f este derivabilă pe R. Avem

$$f'(x) = [\cos x - \sin x + (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)]\, e^{\sin x - \cos x}$$

sau

$$f'(x) = (1 + \cos x - \sin x + 2 \sin x \cos x)\, e^{\sin x - \cos x},$$

$$f'(x) = 0,\quad 1 + \cos x - \sin x + 2 \sin x \cos x = 0,$$

sau

$$\cos x(1 + 2 \sin x) = \sin x - 1;$$

Scanned with OKEN Scanner

ridicînd la patrat, rezultă

$$(1 - \sin x)(1 + \sin x)(1 + 2\sin x)^2 = (1 - \sin x)(1 - \sin x)$$

obținem astfel soluția $\sin x = 1$, $x_1' = \frac{\pi}{2}$;

$$(1 + \sin x)(1 + 4\sin x + 4\sin^2 x) = 1 - \sin x,$$

sau

$$2\sin x(2\sin^2 x + 4\sin x + 3) = 0,$$

cu soluția $\sin x = 0$ deci $x_2' = \pi$, (singura soluție admisă) ; ecuația $2\sin^2 x + 4\sin x + 3 = 0$ nu are soluții reale. Graficul nu are asimptote orizontale, verticale sau oblice.

Tabloul de variație

x	0			$\frac{\pi}{2}$			$\frac{3\pi}{4}$	π		$\frac{3\pi}{2}$			$\frac{7\pi}{4}$			2π
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$		e max A	$\searrow$		0	$-e$ min B	$\nearrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$		0	$\nearrow$		$\frac{1}{e}$

Graficul pe $[0, 2\pi]$ este dat în figura 31.

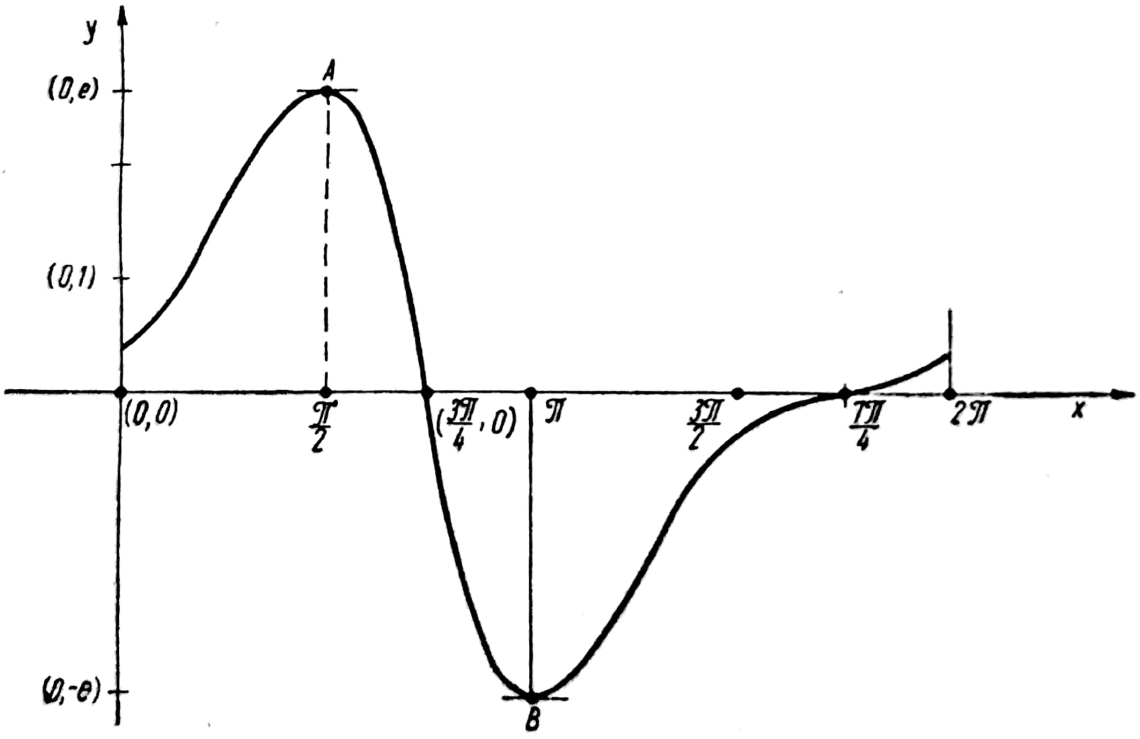


Fig. 31

În trasarea graficului se ține seamă că $f'(0) = \frac{2}{e}$,

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}},\quad f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2}{e},\quad f'(2\pi) = \frac{2}{e},$$

$$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}.$$

Pe R graficul este dat în figura 32.

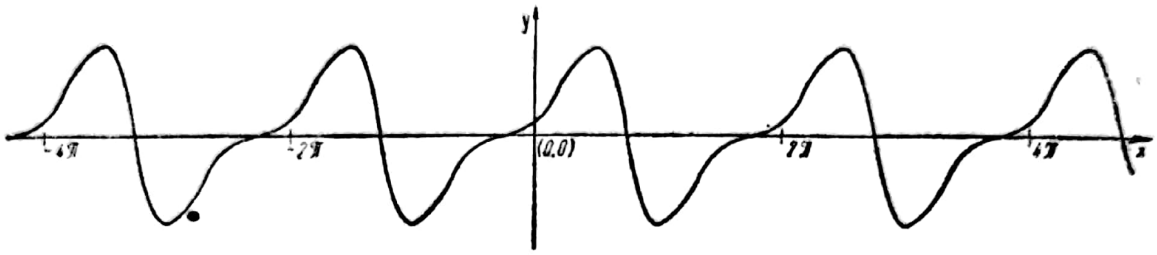


Fig. 32

2) Avem

$$f'(x) = (1 + \cos x - \sin x + 2\sin x \cos x)\, e^{\sin x - \cos x},$$

$f'(x)$ este mărginită pe R deoarece funcțiile

$$g_1(x) = 1 + \cos x - \sin x + 2\sin x \cos x$$

și

$$g_2(x) = \sin x - \cos x$$

sînt mărginite pe R. Avem

$$|g_1(x)| \leqslant 1 + |\sin x| + |\cos x| + |\sin 2x| < 4,$$

$$|g_2(x)| \leqslant |\sin x| + |\cos x| < 2,$$

deci pentru orice $x \leqslant R$ avem

$$|f'(x)| < 4e^2$$

și neegalitatea este strictă.

15. Se dă funcția

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2(x-3)},\quad x \in R.$$

1) Se cere să i se studieze variația și să se reprezinte grafic.

2) Să se determine numărul punctelor de inflexiune și intervalele în care se găsesc.

R. 1) Mulțimea de definiție este R. $f(x) = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Asimptote oblice: $y = mx + n$. $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt[3]{(x+1)^2(x-3)} - x] =$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2(x-3) - x^3}{f^2(x) + x f(x) + x^2} = -\frac{1}{3}$, deci graficul admite asimptota oblică $y = x - \frac{1}{3}$.

Funcția f este derivabilă pe $R - \{-1, +3\}$. Avem

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x-3) + (x+1)^2}{3\sqrt[3]{(x+1)^4(x-3)^2}} = \frac{3x-5}{3\sqrt[3]{(x+1)(x-3)^2}},$$

$f'(x) = 0$, $x_1 = \frac{5}{3}$. Avem și

$$\lim_{x \to -1+0} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1-0} f'(x) = +\infty,$$

deci în punctul $x = -1$, graficul are un punct de întoarcere cu tangenta verticală.

Tabloul de variație

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+ + + +$		$\|$	$- - - -$		0	$+ + + + +$				
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt[3]{3}$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

În punctul $x = 3$, $f(3) = 0$, $f'(3) = +\infty$, graficul are tangenta verticală.

Graficul este dat în figura 33.

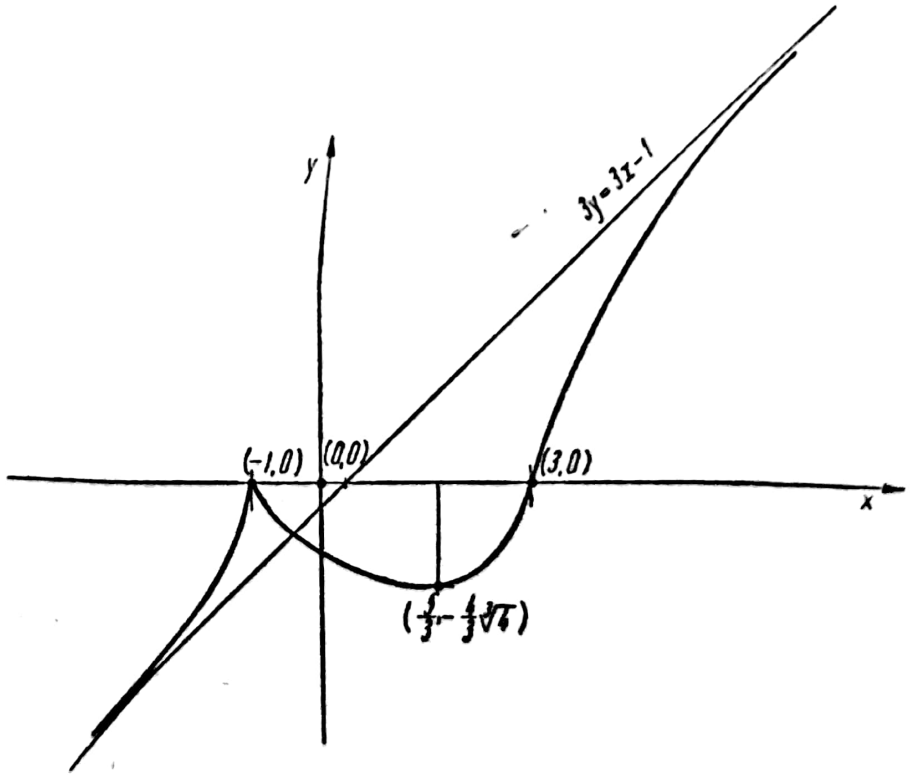


Fig. 33

2) Trebuie să calculăm și derivata a doua. Avem

$$f''(x) = \frac{1}{3}\,\frac{3\sqrt[3]{(x+1)(x-3)^2} - \dfrac{(3x-5)[(x-3)^2+2(x+1)(x-3)]}{3\sqrt[3]{(x+1)^2(x-3)^4}}}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-3)^4}}$$

sau

$$f''(x) = \frac{-32(x-3)}{9\sqrt[3]{(x+1)^4(x-3)^5}}\,.$$

Singurul punct de inflexiune al graficului este punctul $x = 3$; în acest punct tangenta este verticală și traversează graficul.

16. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x,\ x \in R.$$

1968. Institutul Politehnic, Galați.

R. Domeniul de definiție este R. Funcția f este periodică de perioada 2π. O vom studia pe $[0, 2\pi]$.

$$f(x) = 0,\ \sin^3 x + \cos^3 x = 0,\ \sin x + \cos x = 0,$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{4},\qquad x_2 = \frac{7\pi}{4}\,.$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x\cos x - 3\cos^2 x\sin x,$$

$$f'(x) = 0,\ \sin x\cos x(\sin x - \cos x) = 0,$$

$$x_1' = 0,\ x_2' = \frac{\pi}{4},\ x_3' = \frac{\pi}{2},\ x_4' = \pi,\ x_5' = \frac{5\pi}{4}$$

$$x_6' = \frac{3\pi}{2},\ x_7' = 2\pi.$$

Tabloul de variație

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Graficul este dat în figura 34.

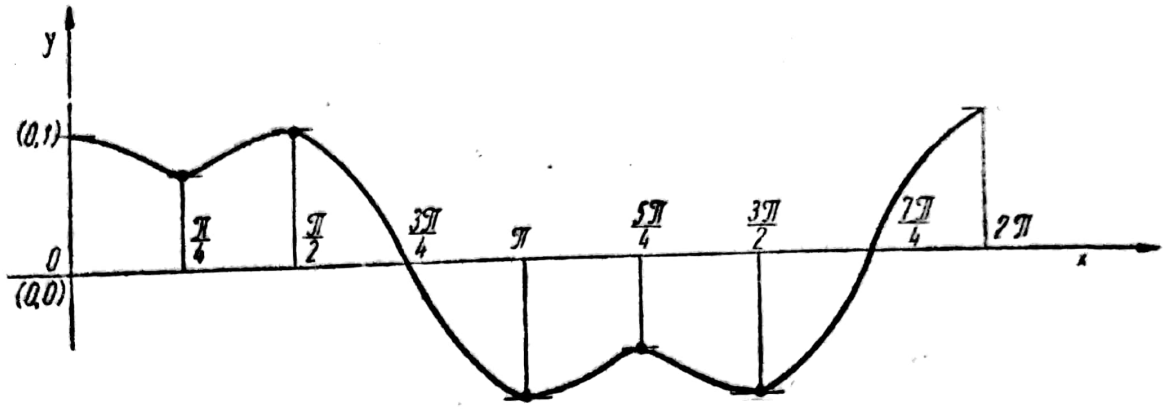


Fig. 34

Pe R, graficul este dat în figura 35.

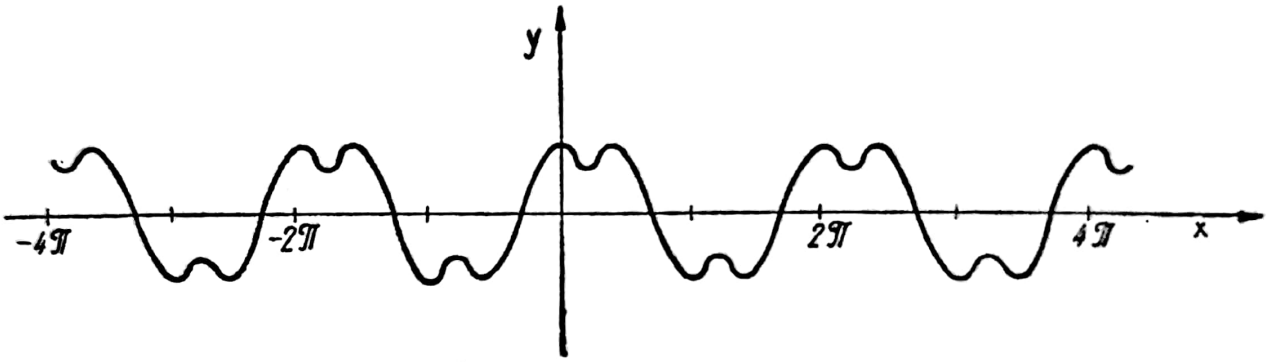


Fig. 35

17. Se dă funcţia

$$f(x) = |x + 1|e^{-|x-1|}, \qquad x \in R$$

şi se cere:

1) să se arate că este continuă pe R;

2) să se găsească punctele în care f nu este derivabilă. În acele puncte (dacă există) să se calculeze derivata la dreapta şi derivata la stînga;

3) să se studieze variaţia lui f şi să se reprezinte grafic;

4) să se arate că derivata întîia este mărginită pe $(1, +\infty)$; să se găsească marginile superioară şi inferioară.

R. 1) Putem scrie

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)e^{1-x}, & x < -1, \\ 0, & x = -1, \\ (x+1)e^{x-1}, & x \in (-1, +1), \\ 2, & x = 1, \\ (x+1)e^{1-x}, & x > 1. \end{cases}$$

Funcția nu poate fi continuă doar în punctele $x = -1$ și $x = 1$; observăm însă că

$$f(-1-0) = 0,\ f(-1+0) = 0,\ f(1+0) = 2,\ f(1-0) = 2,$$

deci este continuă și în aceste puncte; rezultă că f este continuă pe R.

2) Pe $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$, $(1, +\infty)$ funcția f este derivabilă. Avem

$$f'(x) = \begin{cases} -(x+2)e^{x-1}, & x \in (-\infty, -1), \\ (x+2)e^{x-1}, & x \in (-1, +1), \\ -x\,e^{1-x}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

În punctele -1 și $+1$ avem

$$f'(-1-0) = -e^{-2}, \qquad f'(-1+0) = e^{-2},$$

$$f'(1-0) = 3, \qquad f'(1+0) = -1,$$

prin urmare f nu este derivabilă în aceste puncte.

3) Derivata $f'(x)$ se anulează numai în $x_1 = -2$.

Calculăm și derivata de ordinul doi

$$f''(x) = \begin{cases} -(x+3)e^{x-1}, & x \in (-\infty, -1), \\ (x+3)e^{x-1}, & x \in (-1, +1), \\ (x-1)e^{1-x}, & x \in (+1, +\infty). \end{cases}$$

f'' nu există în punctele -1 și $+1$; $f''(x) = 0$, $x_1' = -3$. Avem

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

deci dreapta $y = 0$ este o asimptotă orizontală. Nu avem asimptote oblice; nu avem asimptote verticale.

Tabloul de variație

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{-4}$	$\nearrow$	e^{-3}	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	
					A						B			

Graficul este dat în figura 36.

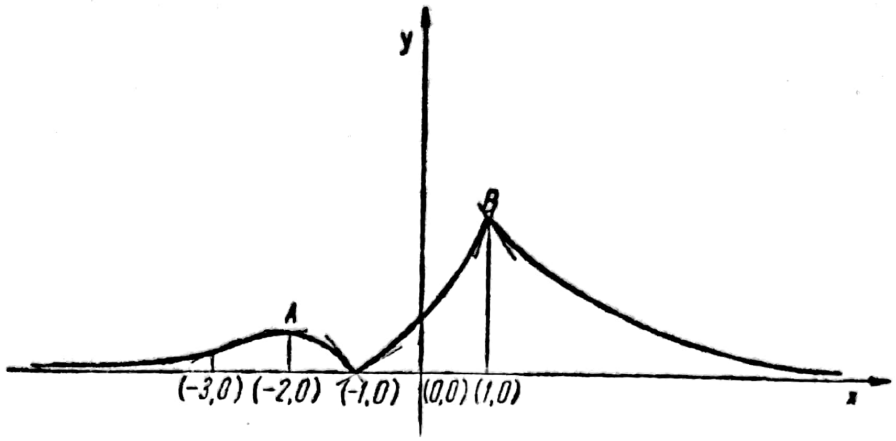


Fig. 36

În grafic nu au fost respectate ordonatele din tabloul de variație.

4) Observăm că pe $(1, +\infty)$ derivata a doua este strict pozitivă deci $f'(x)$ este strict crescătoare, de unde deducem că

$$m = \lim_{x \to 1+0} f'(x) = -1, \qquad M = \lim_{x \to \infty} f'(x) = 0,$$

deci avem neegalitățile

$$-1 < f'(x) < 0, \qquad x \in (1, +\infty).$$

18. Se dă funcția.

$$y(x) = a(x-1) + (x+1)^2 \ln(x+1), \quad x \in (-1, 0],$$

unde a este un parametru real. Se cere:

1) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;

2) să se afle locul geometric al punctelor de extremum ale curbelor de la punctul 1, în cazul cînd a variază;

3) să se reprezinte grafic locul geometric determinat la 2).

R. 1) Pe $(-1, 0]$, $y(x)$ este continuă și derivabilă.

$$\lim_{x \to -1+0} y(x) = \lim_{x \to -1+0} a(x-1) + \lim_{x \to -1+0} (x+1)^2 \ln(x+1) = -2a,$$

deoarece

$$\lim_{x \to -1+0} (x+1)^2 \ln(x+1) = \lim_{x \to -1+0} \frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x \to -1+0} \frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{2}{(x+1)^3}} = 0,$$

$$y(0) = -a,$$

$$y'(x) = a + (x+1)[2\ln(x+1) + 1],$$

$$y''(x) = 2\ln(x+1) + 3, \quad y'' = 0, \quad x_1 = -1 + e^{-\frac{3}{2}}.$$

Discutăm variația lui $y'(x)$ în tabloul următor:

x	-1					$e^{-\frac{3}{2}}-1$					0
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y'	a	↘				$a-2e^{-\frac{3}{2}}$		↗			$a+1$

(α)

În cele ce urmează dăm tabloul de variație al lui $y(x)$ după diverse valori ale lui a, deduse din tabloul de variație (α).

I) $a > 2e^{-\frac{3}{2}}$,

x	-1				0
y'	$+$	$+$	$+$	$+$	
y	$-2a$		↗		$-a$

funcția $y(x)$ este strict crescătoare pe $(-1, 0]$.

II) $0 < a < 2e^{-\frac{3}{2}}$,

x	-1		x_1		x_2		0
y'	$+$		0	$-$	0		$+$
y	$-2a$	↗	max	↘	min	↗	$-a$

funcția $y(x)$ are pe $(-1, 0]$ un maxim și un minim.

III) $-1 < a < 0$,

x	-1			x_1'		0
y'	$-$		$-$	0	$+$	$+$
y	$-2a$	↘		min	↗	$-a$

funcția $y(x)$ are pe $(-1, 0]$ un minim.

IV) $a < -1$,

x	-1						0
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
y	$-2a$			↘			a

funcția $y(x)$ este strict descrescătoare pe $(-1, 0]$.

Scanned with OKEN Scanner

În figura 37 am reprezentat pe același sistem de axe, graficele lui $y(x)$ în cele patru cazuri.

2, 3) Coordonatele punctelor de extremum verifică sistemul

$$y = y(x), \qquad y'(x) = 0$$

sau

$$y = a(x - 1) + (x + 1)^2 \ln (x + 1),$$

$$a + (x + 1)\,[2 \ln (x + 1) + 1] = 0;$$

dacă eliminăm pe a obținem ecuația locului geometric al extremelor

$$y(x) = (-x^2 + 2x + 3) \ln (x + 1) - (x^2 - 1);$$

mulțimea de definiție este $(-1, 0]$; pe $(-1, 0]$, $y(x)$ este continuă și derivabilă.

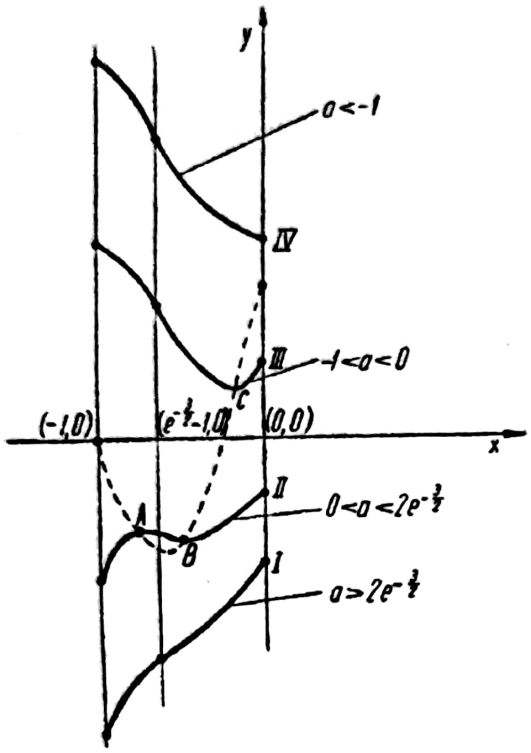


Fig. 37

$$\lim_{x \to -1+0} y(x) = 0, \qquad y(0) = +1,$$

$$y'(x) = (-2x + 2) \ln (x + 1) + \frac{-x^2 + 2x + 3}{x + 1} - 2x,$$

$$y'(x) = -2(x - 1) \ln (x + 1) - 3x + 3,$$

$$x \in (-1, 0],$$

$$y'(x) = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = e^{-\frac{3}{2}} - 1;$$

singura soluție este x_2, deoarece x_1 este situat în afara mulțimii de definiție.

$$y''(x) = -2 \ln (x + 1) - \frac{5x + 1}{x + 1},$$

$y''(-1 + 0) > 0$, $y''(0) < 0$ deci în intervalul $(-1, 0]$, y'' se anulează.

Tabloul de variație

x	-1					$e^{-\frac{3}{2}} - 1$						0
$y'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$y(x)$	0	↘				$\frac{1}{2e^2} - \frac{4}{e^{3/2}}$			↗			1

Dacă reprezentăm grafic pe $(-1, 0]$ pe

$$y_1 = 2 \ln (x + 1), \qquad y_2 = -\frac{5x + 1}{x + 1},$$

Scanned with OKEN Scanner

în figura 38, observăm că $y''(x) = 0$, numai pentru $\xi_1 \in \left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ deci graficul locului geometric al extremelor are un singur punct de inflexiune în $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$.

Avem și

$$f\left(e^{-\frac{3}{2}} - 1\right) = -\frac{3}{2}\left[-\left(e^{-\frac{3}{2}} - 1\right)^2 + 2e^{-\frac{3}{2}} - 2 + 3\right] + 1 - \left(e^{-\frac{3}{2}} - 1\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-3} - 4e^{-\frac{3}{2}} < 0$$

În figura 37 am reprezentat punctat și graficul locului geometric.

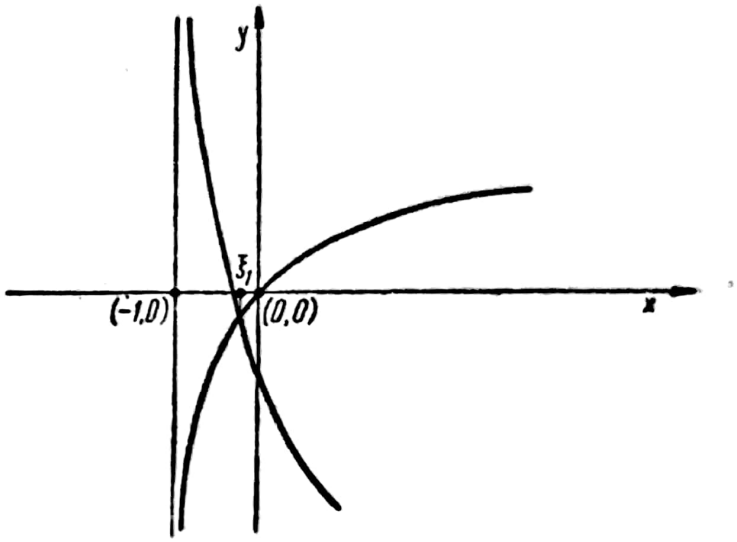


Fig. 38

19. Se dă

$$f(x) = x\, e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}},$$

și

1) se cer mulțimile de definiție, continuitate și derivabilitate;

2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;

3) să se arate că pentru $\lambda \neq 0$, ecuația $f(x) = \lambda$ admite totdeauna două rădăcini reale ξ_1, ξ_2, care satisfac inegalitatea $\xi_1 \cdot \xi_2 > 0$.

R. 1) Funcția $\ln|x|$ nu este definită în punctul $x = 0$ deci din R trebuie să scoatem punctul $x = 0$. Avem și

$$2\ln|x| + 1 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{e}};$$

pentru aceste puncte exponențiala nu este definită. Rezultă că mulțimea de definiție este $R - \left\{-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right\}$. Pentru funcțiile elementare mulțimea de definiție este și mulțimea de continuitate și derivabilitate, cu scoaterea eventuală a unor puncte.
În cazul nostru, mulțimea de continuitate și derivabilitate coincide cu mulțimea de definiție.

2) Avem:

$$2\ln|x| - 1 = 0, \quad x_1' = \sqrt{e}, \quad x_2' = -\sqrt{e},$$

$$\lim_{x\to 0} x e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}} = -\infty,$$

deoarece

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}=1,\ \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}=1.$$

Avem:

$$\lim_{x\to\left|\frac{\pm 1}{\sqrt{e}}\right|+0} x e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}}=0,\quad \lim_{x\to\left|\frac{\pm 1}{\sqrt{e}}\right|-0} x e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}}=+\infty,$$

deoarece

$$\lim_{x\to\left|\frac{\pm 1}{\sqrt{e}}\right|+0}\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}=-\infty,\quad \lim_{x\to\left|\frac{\pm 1}{\sqrt{e}}\right|-0}\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}=+\infty.$$

Pe mulțimea $R-\left\{-\frac{1}{\sqrt{e}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right\}$, $f(x)$ este continuă și derivabilă.

$$f'(x)=\left[1+x\frac{\frac{2}{x}(2\ln|x|+1)-\frac{2}{x}(2\ln|x|-1)}{(2\ln|x|+1)^2}\right]e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}},$$

sau

$$f'(x)=\frac{(2\ln|x|+1)^2+4}{(2\ln|x|+1)^2}e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}},$$

deci $f'(x)>0$ pe mulțimea de definiție.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$					$-\frac{1}{\sqrt{e}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$						$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			0	$-\infty$	$\nearrow$	0	0	$\nearrow$	$+\infty$	0	$\nearrow$			$+\infty$

În origine avem

$$f'(0-0)=e,\qquad f'(0+0)=e.$$

Cercetăm dacă graficul admite asimptotă oblică.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}}=e,$$

$$\lim_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}}-e\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}}-e}{\frac{1}{x}}=$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \lim_{x\to\infty} (-x^2)\,\frac{4}{x}\,\frac{1}{(2\ln|x|+1)^2}\,e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}} =$$

$$= -4\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(2\ln|x|+1)^2}\lim_{x\to\infty} e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}} = -\infty,$$

deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{2\ln|x|-1}{2\ln|x|+1}} = e$ și

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(2\ln|x|+1)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{4}{x}(\ln|x|+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{4}\,\frac{x}{\ln|x|+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{4}\,\frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Prin urmare graficul admite numai asimptotele verticale

$$x = -\frac{1}{\sqrt{e}},\quad x = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

În figura 39 dăm graficul funcției $\bar{f}(x)$, prelungirea prin continuitate a lui $f(x)$ în punctul $x = 0$.

2) Dacă intersectăm graficul cu dreapta $y = \lambda$, $\lambda \neq 0$, obținem pentru $\lambda > 0$, două rădăcini reale și pozitive

$$\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right),\quad \xi_2 > \frac{1}{\sqrt{e}},$$

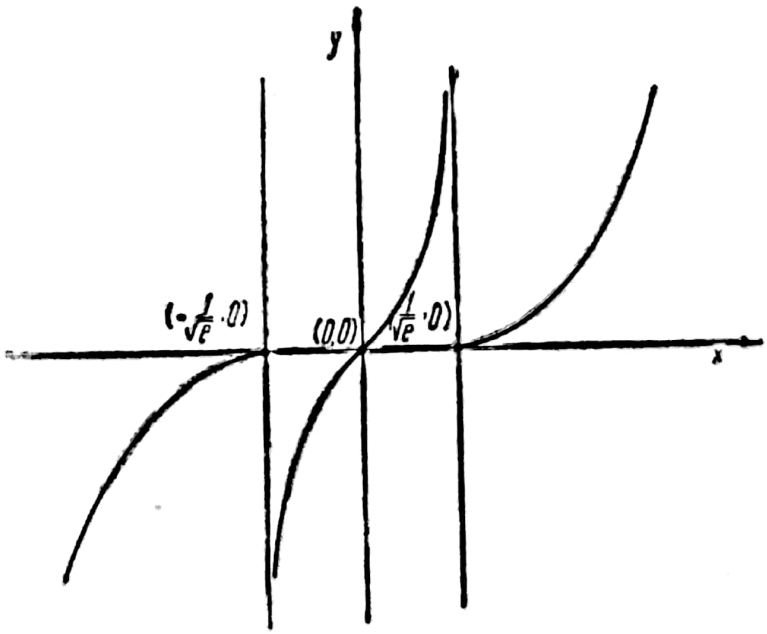


Fig. 39

Scanned with OKEN Scanner

iar pentru $\lambda < 0$, două rădăcini reale negative $\xi_1 \in \left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right)$ și $\xi_2 < \frac{-1}{\sqrt{e}}$. În ambele cazuri $\xi_1 \cdot \xi_2 > 0$.

20. Se dă

$$f(x) = \frac{3 \operatorname{Arctg} x - \pi}{16 \operatorname{Arctg}^2 x - \pi^2}$$

și se cere să se studieze variația și să se reprezinte grafic.

R. 1) Mulțimea de definiție a lui f este R din care trebuie să scoatem punctele pentru care numitorul se anulează:

$$16 \operatorname{Arctg}^2 x - \pi^2 = 0, \qquad \operatorname{Arctg} x = -\frac{\pi}{4}, \quad x_1 = -1;$$

$$\operatorname{Arctg} x = +\frac{\pi}{4}, \qquad x_2 = 1;$$

deci mulțimea de definiție este $R - \{-1, 1\}$.
Pe aceasta mulțime f este continuă și derivabilă.

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \frac{3 \operatorname{Arctg} x - \pi}{(4 \operatorname{Arctg} x - \pi)(4 \operatorname{Arctg} x + \pi)} = -\infty,$$

deoarece $4 \operatorname{Arctg} x + \pi \to 0 -$ cînd $x \to -1 - 0$. În mod asemănător avem

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1-0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = -\infty,$$

deci graficul admite asimptotele verticale $x = 1$, $x = -1$,

$$f(x) = 0, \quad \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{3}, \quad x_1' = \sqrt{3};$$

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{1+x^2}(16 \operatorname{Arctg}^2 x - \pi^2) - \frac{32}{1+x^2} \operatorname{Arctg} x (3 \operatorname{Arctg} x - \pi)}{(16 \operatorname{Arctg}^2 x - \pi)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \frac{1}{(16 \operatorname{Arctg}^2 x - \pi)^2} (48 \operatorname{Arctg}^2 x - 32\pi \operatorname{Arctg} x + 3\pi^2),$$

$$f'(x) = 0, \quad \operatorname{Arctg} x = \pi \frac{16 \pm \sqrt{112}}{48};$$

$$\operatorname{Arctg} x_1 = 0{,}55\pi, \quad \operatorname{Arctg} x_2 = 0{,}118\pi \simeq 0{,}37.$$

Deoarece considerăm pentru Arctg x determinarea principală prima soluție este imposibilă; a doua soluție dă $x_2 \simeq 0{,}36$. Avem și:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\frac{3\pi}{2} - \pi}{16 \frac{\pi^2}{4} - \pi^2} = \frac{1}{6\pi},$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-\frac{3\pi}{2} - \pi}{16 \frac{\pi^2}{4} - \pi^2} = -\frac{5}{6\pi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variație

x	$-\infty$		-1		0		$0{,}36$		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\frac{5}{6\pi}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\pi}$ A	$\searrow$	$\frac{0{,}83}{\pi}$ B	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ $\frac{1}{6\pi}$

$$f(x_2) = \frac{3 \cdot 0{,}118 - 1}{16 \cdot 0{,}118^3 - 1} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{0{,}83}{\pi}.$$

Graficul (fig. 40) admite asimptotele orizontale

$$y = -\frac{5}{6\pi} \quad \text{și} \quad y = \frac{1}{6\pi}.$$

Pentru cele două axe s-au luat unități diferite.

21. Să se arate că funcția

$$f(x) = \min(|\sin x|, \ |\cos x|), \ x \in R,$$

are o infinitate de minime și o infinitate de maxime însă în nici unul din punctele de extremum derivata nu se anulează.

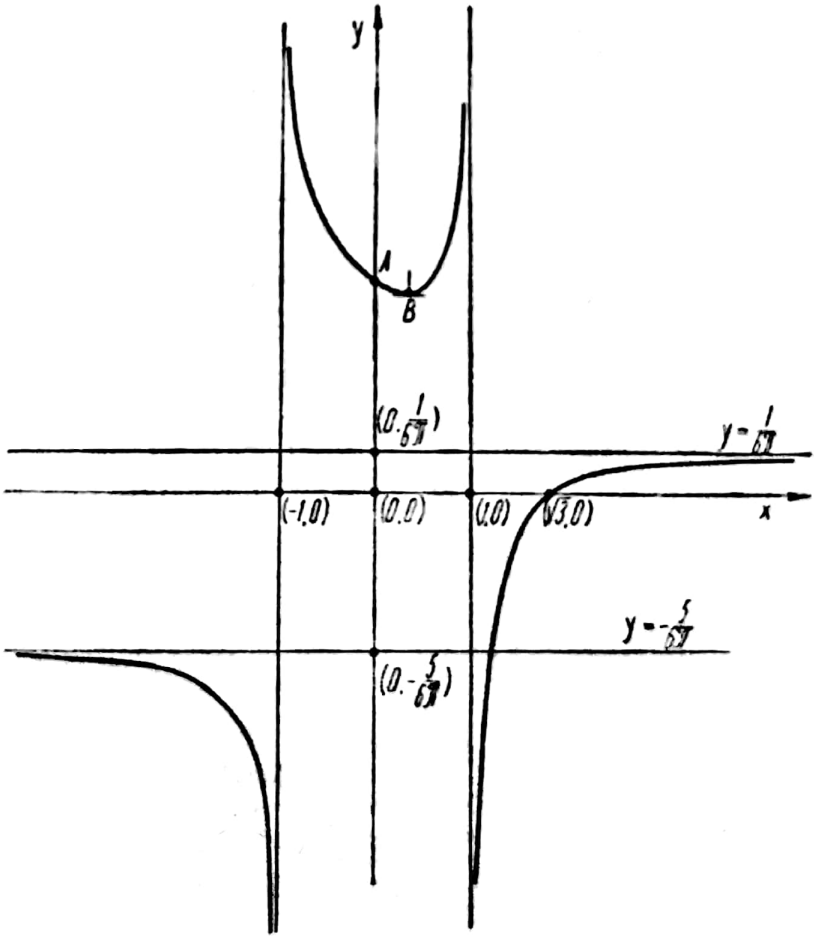


Fig. 40

Scanned with OKEN Scanner

R. 1) Funcțiile $|\sin x|$ și $|\cos x|$ sînt periodice de perioadă 2π. Deoarece avem pe $[0, 2\pi]$.

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi), \\ -\sin x, & x \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ -\cos x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \\ \cos x, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \end{cases}$$

rezultă că

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right), \\ \cos x, & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \\ -\cos x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \\ \sin x, & x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right), \\ -\sin x, & x \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right), \\ -\cos x, & x \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right), \\ \cos x, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right), \\ -\sin x, & x \in \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]. \end{cases}$$

Graficul pe R este dat în figura 41.

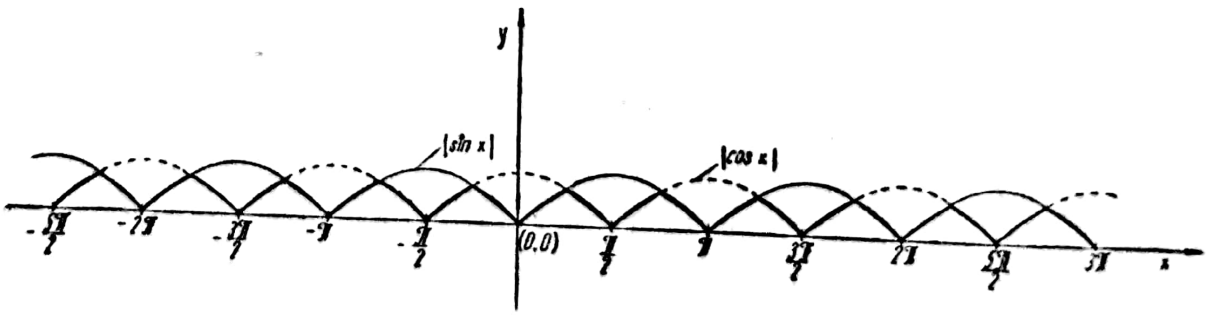


Fig. 41

Derivata $f'(x)$ există pe $R - \left\{k\frac{\pi}{4}\right\}$, $k = 0, -1, +1, \ldots$ și nu se anulează pe mulțimea de derivabilitate. În toate punctele $x = k\frac{\pi}{4}$, f are un extremum, mai precis în punctele $x' = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, f este maximă și în punctele $x'' = k\frac{\pi}{2}$ este minimă. În aceste puncte f nu este derivabilă. Avem:

$$f'(0+) = (\sin x)'_0 = 1, \quad f'\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = (\sin x)'_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4} + 0\right) = (\cos x)'_{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = (\cos x)'_{\frac{\pi}{2}} = -1 \text{ etc.},$$

Astfel de funcții apar în modelarea unor fenomene periodice.

22. Se dă

$$f(x) = \ln x^2 \cdot e^{\frac{x-1}{x}},$$

și:

1) se cer mulțimile de definiție, de continuitate și de derivabilitate;
2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;
3) să se scrie ecuațiile tangentelor în punctele $x_1 = +1$ și $x_2 = -1$;
4) să se arate că în intervalul (0, 1) graficul are cel puțin un punct de inflexiune.

R. 1) Funcția $f(x)$ este produsul a două funcții $g(x) = \ln x^2$ și $h(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$; mulțimea de definiție a lui f este intersecția mulțimilor de definiție ale lui g și h deci această mulțime este $R - \{0\}$, deoarece $g(x)$, $h(x)$ sînt definite pe $R - \{0\}$. Mulțimile de continuitate și derivabilitate coincid cu mulțimea de definiție.

2) Avem

$$\lim_{x\to\infty} \ln x^2 e^{\frac{x-1}{x}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \ln x^2 e^{\frac{x-1}{x}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to0+} \ln x^2 e^{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to0+} \frac{\ln x^2}{e^{\frac{1-x}{x}}} = \lim_{x\to0+} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1-x}{x}}} = -2 \lim_{x\to0+} \frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{\frac{1}{x}} = 0;$$

am aplicat regula lui l'Hospital;

$$\lim_{x\to0-} \ln x^2 e^{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to0-} \ln x^2 \cdot \lim_{x\to0-} e^{\frac{x-1}{x}} = -\infty \cdot \infty = -\infty.$$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul admite asimptota verticală $x = 0$.

$$f(x) = 0, \quad x_1 = +1, \quad x_2 = -1.$$

Graficul nu are asimptote oblice.

Calculăm derivata $f'(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\ln x^2\right) e^{\frac{x-1}{x}} = \frac{2x + \ln x^2}{x^2} e^{\frac{x-1}{x}};$$

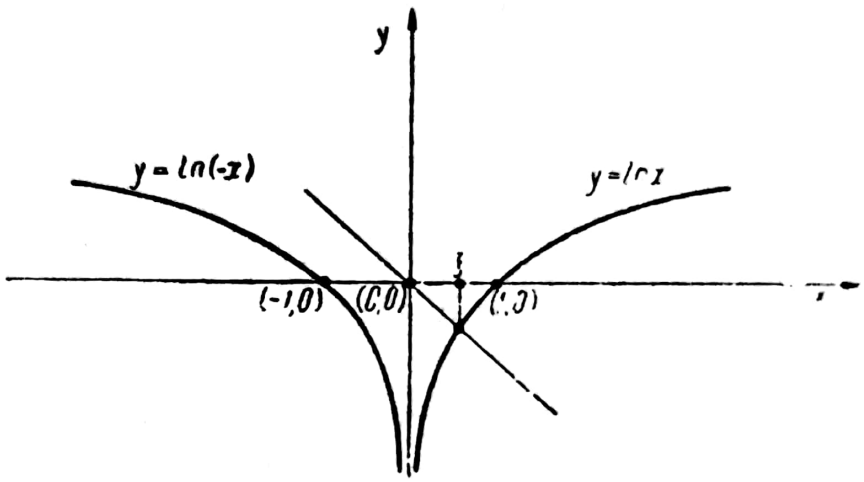


Fig. 42

$f'(x) = 0$, $x + \ln|x| = 0$. Dacă intersectăm graficele funcţiilor $y = -x$ şi $y = \ln|x|$, (fig. 42) obţinem o singură rădăcină reală $\xi \in (0, 1)$. Este necesar în trasarea graficului să calculăm $f'(0+)$. Din expresia lui $f'(x)$ rezultă că $f'(0+) = 0$.

Tabloul de variaţie

x	$-\infty$		-1		0		ξ		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$		0	$\searrow$	$-2\xi e^{1-\frac{1}{\xi}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
									A				

Avem $f(\xi) = \ln x^2 e^{1-\frac{1}{x}}\Big|_{\xi} = -2\xi e^{1-\frac{1}{\xi}}$, $\xi \in (0, 1)$.

Pentru $\xi \simeq \frac{1}{2}$, $f(\xi) \simeq -\frac{1}{e}$.

Graficul este dat în figura 43.

În trasarea graficului se ține seama că $f'(-1) = -2e^2$ și $f'(1) = 2$.

3) Am calculat $f'(+1) = 2$ deci ecuația tangentei la grafic în acest punct este:

$$y = 2(x - 1).$$

Avem și $f'(-1) = -2e^2$, deci tangenta la grafic în acest punct are ecuația

$$y + 2e^2(x + 1) = 0.$$

4) În punctul (0) graficul admite semitangenta Ox $(x > 0)$ iar în punctul $\xi \in (0, 1)$, $f'(\xi) = 0$. Conform teoremei lui Rolle există un punct $\xi' \in (0, \xi)$ deci $\xi' \in (0, 1)$ în care $f''(\xi') = 0$.

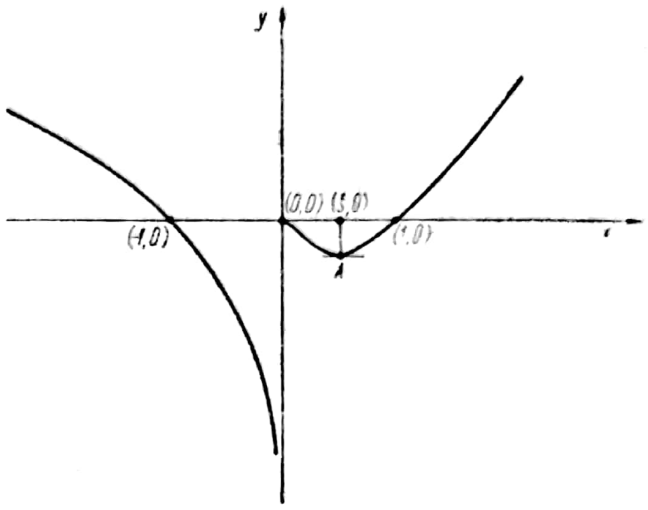


Fig. 43

23. Se dă

$$f(x) = \operatorname{Arctg} \frac{2 \ln |x| - 1}{\ln |x| + 1}$$

și se cer:

1) mulțimile de definiție, de continuitate și derivabilitate;

2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;

3) să se determine punctele de inflexiune ale graficului.

R. 1) Deoarece funcția Arctg $(u(x))$ este definită pe mulțimea de definiție a lui $u(x)$, funcția

$$u(x) = \frac{2 \ln |x| - 1}{\ln |x| + 1},$$

nu este definită pentru $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{e}$, $x_4 = -\frac{1}{e}$ deci mulțimea de definiție este $R - \left\{-\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\right\}$. Mulțimile de continuitate și derivabilitate sînt egale cu mulțimea de definiție.

2) $f(x) = 0$, $2 \ln |x| - 1 = 0$, $x_1' = \sqrt{e}$, $x_2' = -\sqrt{e}$,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \operatorname{Arctg} 2, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \operatorname{Arctg} 2;$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{e} - 0} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to -\frac{1}{e} + 0} f(x) = +\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{e} - 0} f(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to \frac{1}{e} + 0} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Graficul admite asimptota orizontală $y = \operatorname{Arctg} 2$,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{Arctg} \frac{2\ln|x| - 1}{\ln|x| + 1} = \operatorname{Arctg} 2.$$

Funcția $f(x)$ este derivabilă pe $R - \left\{-\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\right\}$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\ln|x| - 1}{\ln|x| + 1}\right)^2} \cdot \frac{\frac{2}{x}(\ln|x| + 1) - \frac{1}{x}(2\ln|x| - 1)}{(1 + \ln|x|)^2},$$

sau

$$f'(x) = \frac{3}{x[(2\ln|x| - 1)^2 + (\ln|x| + 1)^2]};$$

derivata nu se anulează pe mulțimea de definiție.

Tabloul de variație

x	$-\infty$	$-\sqrt{e}$	$\frac{-1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$ $-$ $-$ $-$		$-$ $-$ $-$ $-$	$+$ $+$ $+$	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$		
$f(x)$	$\operatorname{Arctg} 2$	$\searrow$ 0 $\searrow$ $-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$ $\searrow$ $\operatorname{Arctg} 2$ $\nearrow$ $\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$ 0 $\nearrow$ $\operatorname{Arctg} 2$	

Graficul este dat în figura 44.

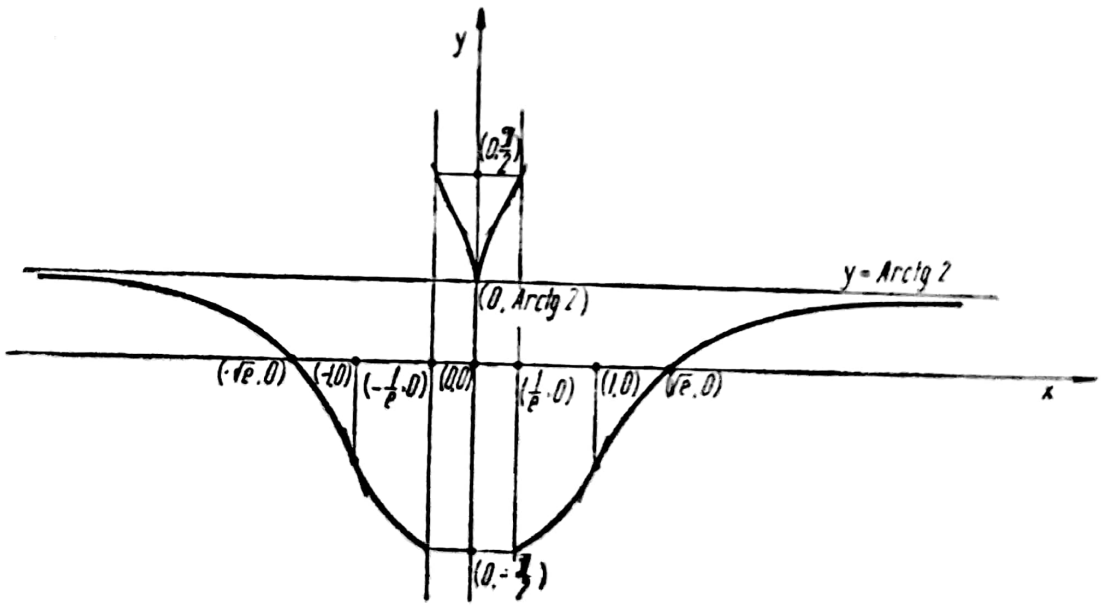


Fig. 44

În trasarea graficului se ține seama că $f'(-\sqrt{e}) = -\frac{4}{3\sqrt{e}}$,

$$f'(\sqrt{e}) = \frac{4}{3\sqrt{e}},\ f'(0-) = -\infty,\ f'(0+) = +\infty;$$

$$f'\left(-\frac{1}{e}+0\right) = -\frac{e}{3},\ f'\left(\frac{1}{e}-0\right) = \frac{e}{3}.$$

În punctul $x = 0$ funcția f nu este definită; poate fi prelungită prin continuitate. În acest caz în punctul $x = 0$, prelungirea lui f are un punct de întoarcere.

3) Trebuie calculată derivata a doua

$$f''(x) = -\frac{3}{x^2[(2\ln|x|-1)^2+(\ln|x|+1)^2]} - \frac{3}{x^2}\cdot\frac{4(2\ln|x|-1)+2(\ln|x|+1)}{[(2\ln|x|-1)^2+(\ln|x|+1)^2]^2},$$

$$f''(x) = \frac{-3}{x^2}\cdot\frac{\ln|x|(5\ln|x|+8)}{[(2\ln|x|-1)^2+(\ln|x|+1)^2]^2};$$

$$f''(x) = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = +1,\ x_3 = -\frac{1}{e^{\frac{8}{5}}},\ x_4 = \frac{1}{e^{\frac{8}{5}}}.$$

Graficul lui $f(x)$ are punctele de inflexiune

$$\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right);\ \left(1, -\frac{\pi}{4}\right);\ (-e^{-\frac{8}{5}}, \operatorname{Arctg} 7);\ (e^{-\frac{8}{5}}, \operatorname{Arctg} 7).$$

24. Se dă

$$f(x) = \frac{\ln|x|-1}{\ln|x|+1}\,e^{\frac{1}{x}}$$

și se cere:

1) mulțimile de definiție, de continuitate și derivabilitate;

2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;

3) să se scrie ecuațiile tangentelor la grafic în punctele în care intersectează axa Ox;

4) să se arate că pentru $\lambda \in (0, 1)$ ecuația $f(x) = \lambda$ are o rădăcină reală situată în intervalul $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$.

R. 1) Funcția $\ln|x|$ este definită pe $R - \{0\}$ deci din mulțimea R trebuie să scoatem numărul zero.

Avem $\ln|x| + 1 = 0$ pentru $x_1 = \frac{1}{e}$ și $x_2 = -\frac{1}{e}$, prin urmare din R trebuie să scoatem și numerele $\frac{1}{e}$ și $-\frac{1}{e}$. Deoarece pentru celelalte puncte din R, $f(x)$ este definită rezultă că mulțimea de definiție a lui $f(x)$ este $R - \left\{-\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\right\}$.

Mulțimile de continuitate și derivabilitate coincid cu mulțimea de definiție.

Scanned with OKEN Scanner

2) Avem $f(x) = 0$, $x_1' = e$, $x_2' = -e$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln|x| - 1}{\ln|x| + 1} e^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1,$$

deci graficul admite asimptota orizontală $y = 1$.

Avem $\lim_{x \to \left|\frac{\pm 1}{e}\right| + 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \left|\frac{\pm 1}{e}\right| - 0} f(x) = +\infty$,

prin urmare graficul admite asimptotele verticale $x = -\frac{1}{e}$ și $x = \frac{1}{e}$. Avem

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln|x| - 1}{\ln|x| + 1} \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot \infty = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\ln|x| - 1}{\ln|x| + 1} \lim_{x\to 0-1} e^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot 0 = 0,$$

prin urmare graficul admite pe $y = 0$, asimptotă verticală.

Pe $R - \left\{-\frac{1}{e}, \quad 0, \frac{1}{e}\right\}$, f este derivabilă.

$$f'(x) = \left[\frac{\frac{1}{x}(\ln|x| + 1) - \frac{1}{x}(\ln|x| - 1)}{(\ln|x| + 1)^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\ln|x| - 1}{\ln|x| + 1}\right] e^{\frac{1}{x}}$$

sau

$$f'(x) = \frac{2x + 1 - \ln^2|x|}{x^2(\ln|x| + 1)^2} e^{\frac{1}{x}};$$

$$f'(x) = 0, \; 2x + 1 - \ln^2|x| = 0.$$

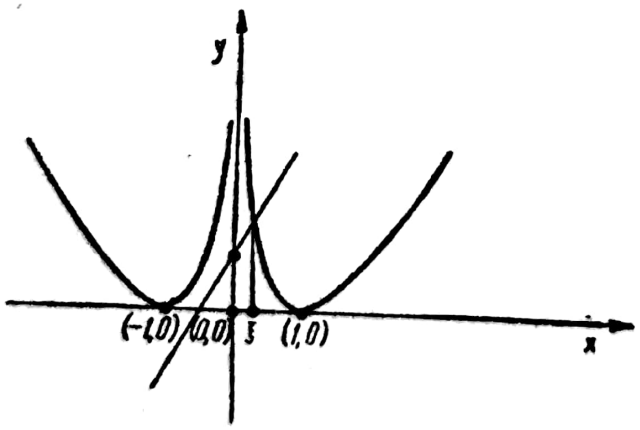


Fig. 45

În figura 45 am reprezentat grafic pe $y = \ln^2|x|$ și dreapta $y = 2x + 1$; cele două curbe se intersectează într-un singur punct $\xi \in (0, 1)$, deci $f'(x) = 0$, pentru $\xi \in (0, 1)$.

Deoarece

$$f'(0+) < 0, \; f'\left(\frac{1}{e}\right) > 0$$

rezultă că $\xi \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$.

Avem și $f\left(\frac{1}{e^{3/2}}\right) < 0$,

deci $\xi \in \left(e^{-\frac{3}{2}}, e^{-1}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variație

x	$-\infty$		$-e$		$-\frac{1}{e}$		0		ξ		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow 0$	$+\infty$	$\searrow f(\xi)$	$\nearrow +\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

A

$$f(\xi) = \frac{\sqrt{2\xi+1}-1}{\sqrt{2\xi+1}+1}\, e^{\frac{1}{\xi}}, \quad \xi \simeq \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) \simeq \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\, e^4.$$

În trasarea graficului se ține seama că

$$f'(-e) = \frac{-2e}{4e^2}\, e^{-\frac{1}{e}}, \; f'(e) = \frac{2e}{4e^2}\, e^{\frac{1}{e}}, \; f'(0-) = 0.$$

Graficul este dat în figura 46.

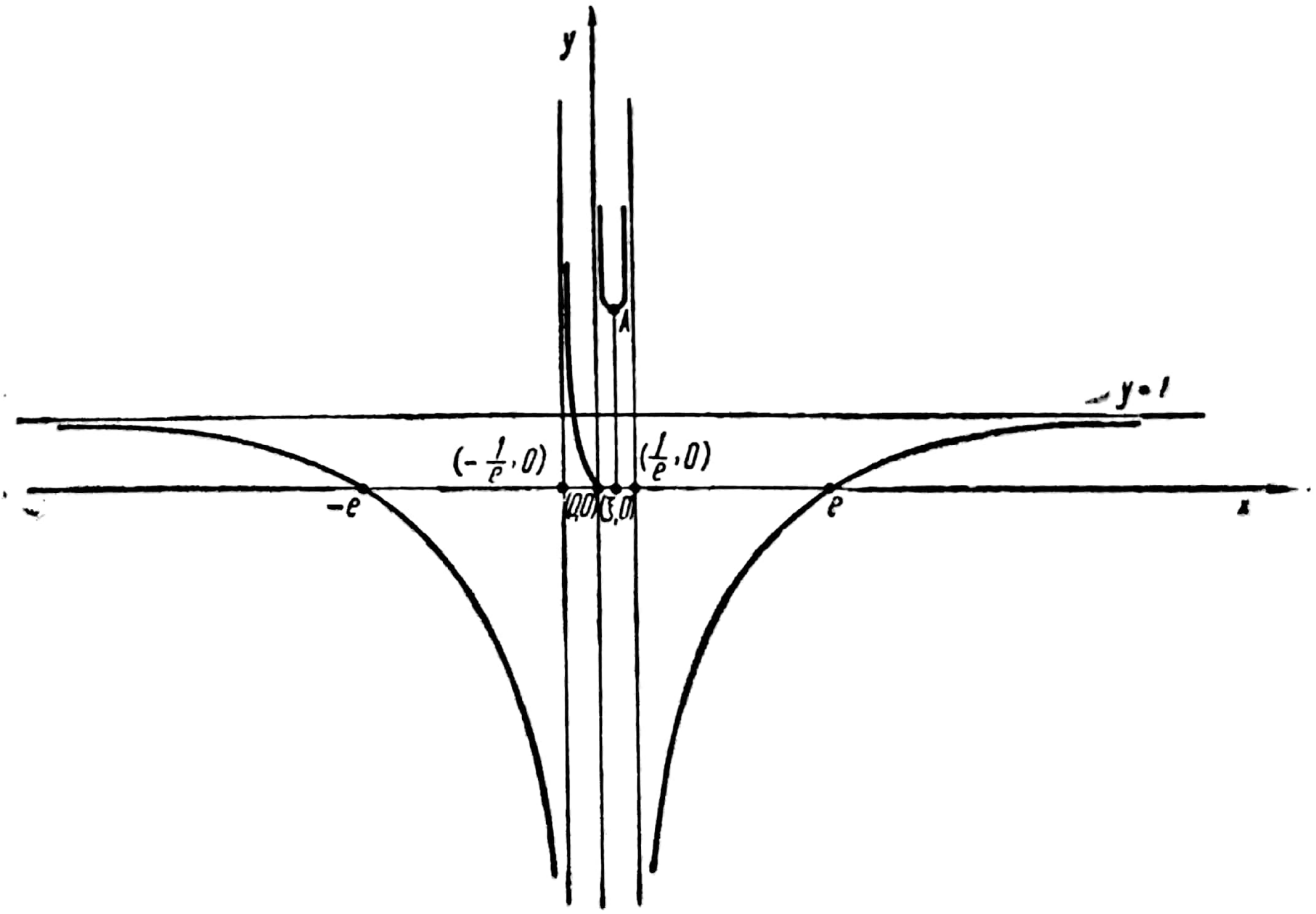


Fig. 46

3) În punctul $(-e, 0)$ tangenta la grafic are ecuația

$$y + \frac{1}{2e} e^{-\frac{1}{e}} (x + e) = 0.$$

În punctul $(e, 0)$, graficul are tangenta de ecuație

$$y = \frac{1}{2e} e^{\frac{1}{e}} (x - e).$$

4) Dacă intersectăm graficul lui $f(x)$ cu dreapta variabilă $y = \lambda$, $0 < \lambda < 1$ observăm că se obține un singur punct de intersecție, care are abscisa negativă, mai precis situat în intervalul $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IV

Integrale nedefinite. Integrale definite. Aplicaţii: arii, centre de greutate, momente de inerţie, etc. Teorema lui Guldin.

Scanned with OKEN Scanner

1. Să se calculeze integrala nedefinită

$$I = \int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx, \quad x \in (-1, +1).$$

R. Folosim formula de integrare prin părți

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

$$u = \arccos x, \quad dv = \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$du = \frac{-dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad v = -\sqrt{1 - x^2},$$

$$\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = -\sqrt{1 - x^2} \arccos x - \int dx,$$

deci

$$I = -\sqrt{1 - x^2} \arccos x - x + C, \quad x \in (-1, +1).$$

2. Să se calculeze

$$I = \int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} \, dx, \quad x \in R.$$

R. Avem

$$I = \int \frac{(x^2 + 1 - 1) \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx = \int \operatorname{arctg} x \, dx - \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx,$$

$$I = I_1 - I_2;$$

Scanned with OKEN Scanner

observăm că

$$I_2 = \int \operatorname{arctg} x \, d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C;$$

pe I_1 o integrăm prin părți

$$u = \operatorname{arctg} x, \qquad dv = dx,$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad v = x,$$

$$I_1 = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C',$$

$$I = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C, \quad x \in R.$$

3. Să se calculeze

$$F(x) = \int \frac{dx}{e^{3x} + 2e^{2x} - e^x - 2}$$

apoi să se determine mulțimea pe care nu este definită $F(x)$.

R. Punem $e^x = u$, $e^x dx = du$, $dx = \frac{1}{u}du$, $u > 0$,

$$\int \frac{dx}{e^{3x} + 2e^{2x} - e^x - 2} = \int \frac{du}{u(u^3 + 2u^2 - u - 2)},$$

avem: $u^3 + 2u^2 - u - 2 = (u-1)(u+1)(u+2)$, deci trebuie să descompunem în elemente simple funcția rațională de integrat

$$\frac{1}{u(u-1)(u+1)(u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{u+1} + \frac{D}{u+2}.$$

Dacă înmulțim în ambele părți cu u și facem $u \to 0$ obținem $A = -\frac{1}{2}$; dacă înmulțim cu $u-1$ și facem ca $u \to 1$ obținem $B = \frac{1}{6}$; în acelaș mod obținem $C = \frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{6}$.

Avem, așadar,

$$\int \frac{du}{u(u^3 + 2u^2 - u - 1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \frac{1}{6}\int \frac{du}{u-1} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u+1} - \frac{1}{6}\int \frac{du}{u+2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln u + \frac{1}{6}\ln|u-1| + \frac{1}{2}\ln(u+1) - \frac{1}{6}\ln(u+2) + C,$$

de unde rezultă imediat că

$$F(x) = \frac{1}{6}\ln\frac{|e^x - 1| \cdot (e^x+1)^3}{e^{3x}(e^x+2)} + C.$$

Funcția F nu este definită în punctul $x = 0$.

4. Să se arate că pentru $x \in (-1, +1)$ avem

$$\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x - \sqrt{1-x^2}\operatorname{arctg} x + C.$$

R. Pe $(-1, +1)$ integrantul este continuu deci funcţia

$$F(x) = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x - \sqrt{1-x^2}\operatorname{arctg} x + C$$

este o primitivă a funcţiei $f(x) = \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}}$; prin urmare este suficient să arătăm că

$$F'(x) = f(x), \qquad x \in (-1, +1).$$

$$\left(\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1+x^2}\,\frac{\sqrt{2}(1-x^2+x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)}, \quad -(\arcsin x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arctg} x)' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arctg} x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}.$$

Însumînd rezultatele obţinute avem

$$F'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arctg} x,$$

sau

$$F'(x) = \frac{2-(1+x^2)-(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arctg} x,$$

deci

$$F'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arctg} x, \quad x \in (-1, +1).$$

5. Să se arate că pentru $x > 0$

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}(\ln x + 1) + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Este suficient să arătăm că

$$F'(x) = \frac{\ln x}{x^2\sqrt{1+x^2}}, \quad x > 0.$$

Pentru $x > 0$, F este derivabilă. Avem

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}(\ln x + 1) + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right];$$

obținem succesiv

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}(\ln x + 1)\right] = -\frac{x}{x\sqrt{1+x^2}}(\ln x + 1) +$$

$$+ \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}(\ln x + 1) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x^2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

și

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

deci

$$F'(x) = \frac{\ln x}{x^2\sqrt{1+x^2}}, \quad x > 0,$$

6. Să se calculeze integrala nedefinită

$$F(x) = \int \cos mx \cos nx\, \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x, \quad x \in R.$$

R. Transformăm mai întîi produsul $\cos mx \cdot \cos nx$ în sumă

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$$

deci

$$F(x) = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{ax}\cos(m+n)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{ax}\cos(m-n)x\,\mathrm{d}x,$$

iar calculul lui $F(x)$ s-a redus la integrala de tipul

$$I(x) = \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x,$$

pe care o integrăm prin părți. Punem $\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$,

$$\cos bx = u, \quad v = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}, \quad \mathrm{d}u = -b\sin bx\,\mathrm{d}x$$

$$I(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Integrala

$$K(x) = \int e^{ax} \sin bx \, dx,$$

o efectuăm tot prin părţi. Punem $e^{ax} dx = dv$,

$$\sin bx = u, \quad v = \frac{1}{a} e^{ax}, \quad du = b \cos bx \, dx,$$

$$K(x) = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx,$$

deci

$$I(x) = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} I(x) \right),$$

sau

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I(x) = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx,$$

de unde

$$I(x) = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C.$$

Folosind acest rezultat obţinem imediat pe $F(x)$, $x \in R$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{ax}}{a^2 + (m+n)^2} [a \cos (m+n)x + (m+n) \sin (m+n)x] +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{e^{ax}}{a^2 + (m-n)^2} [a \cos (m-n)x + (m-n) \sin (m-n)x] + C.$$

7. Să se calculeze

$$F(x) = \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x - b \cos^2 x}$$

apoi să se determine punctele în care $F(x)$ nu este definită.

R.
$$F(x) = \int \frac{1}{a^2 \operatorname{tg}^2 x - b^2} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{a^2 \operatorname{tg}^2 x - b^2} d(\operatorname{tg} x)$$

deci se impune schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = u$, $x \neq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$. Avem

$$F^*(u) = \int \frac{du}{a^2 u^2 - b^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^2 - \frac{b^2}{a^2}},$$

însă

$$\frac{1}{u^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{u - \alpha} - \frac{1}{u + \alpha} \right),$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$F^*(u) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{a}{b} \left(\int \frac{du}{u - \frac{b}{a}} - \int \frac{du}{u + \frac{b}{a}} \right),$$

$$F^*(u) = \frac{1}{2ab} \cdot \ln \left| \frac{au - b}{au + b} \right| + C;$$

revenind la variabila x obținem

$$F(x) = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{a \operatorname{tg} x - b}{a \operatorname{tg} x + b} \right| + C.$$

Funcția $F(x)$ este definită pe R din care trebuie să se scoată punctele pentru care

$$a \sin x - b \cos x = 0, \quad a \sin x + b \cos x = 0,$$

deci punctele pentru care: $a^2 \sin^2 x - b^2 \cos^2 x = 0$.

8. Să se calculeze

$$F(x) = \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

R. Avem

$$F(x) = \int \frac{1}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x},$$

prin urmare cu substituția $\operatorname{tg} x = u$, $\frac{dx}{\cos^2 x} = du$, rezultă

$$F^*(u) = \int \frac{du}{a^2 + b^2 u^2} = \frac{1}{b^2} \int \frac{du}{\frac{a^2}{b^2} + u^2},$$

deci

$$F^*(u) = \frac{1}{b^2} \frac{b}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{b}{a} u + C;$$

revenind la variabila x obținem pe $F(x)$

$$F(x) = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right) + C.$$

9. Să se calculeze

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 - b^2)},$$

apoi să se determine mulțimile de definiție și de continuitate ale lui $F(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

R. Avem

$$\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2-b^2)} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{x^2-b^2} - \frac{1}{x^2+a^2}\right),$$

însă

$$\frac{1}{x^2-b^2} = \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x+b}\right),$$

deci

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2-b^2)} = \frac{1}{2b(a^2+b^2)}\left(\int \frac{dx}{x-b} - \int \frac{dx}{x+b}\right) - \frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2},$$

$$F(x) = \frac{1}{2b(a^2+b^2)} \ln\left|\frac{x-b}{x+b}\right| - \frac{1}{a^2+b^2}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Mulțimea de definiție al lui F este R din care se scot punctele pentru care $x-b=0$, $x+b=0$, deci $x^2-b^2=0$. Funcțiile ln și arctg fiind continue pe mulțimea de definiție rezultă că mulțimea de continuitate este $R-\{-b, b\}$. Se observă că mulțimile de definiție și de continuitate ale lui F sînt mulțimile de definiție și de continuitate ale integrantului.

10. Să se calculeze

$$F(x) = \int \frac{dx}{4+e^x}, \quad x \in R.$$

R. Facem schimbarea de variabilă

$$e^x = u, \; e^x\,dx = du, \; \text{deci } dx = \frac{1}{u}\,du, \quad u > 0,$$

și integrala se transformă în

$$\int \frac{du}{u(4+u)} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u+4} = \frac{1}{4}\ln u - \frac{1}{4}\ln(u+4) + C.$$

Revenim la variabila inițială

$$F(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{e^x}{e^x+4} + C, \quad x \in R.$$

11. Să se calculeze

$$F(x) = \int \frac{dx}{a^2+e^{mx}}, \quad x \in R.$$

R. Facem schimbarea de variabilă $e^{mx} = u$, $m\,e^{mx}\,dx = du$, deci $dx = \frac{1}{m}\frac{du}{u}$, iar integrala se transformă în

$$\frac{1}{m}\int \frac{du}{u(a^2+u)} = \frac{1}{ma^2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{ma^2}\int \frac{du}{a^2+u} = \frac{1}{ma^2}\ln u - \frac{1}{ma^2}\ln(a^2+u) + C.$$

Scanned with OKEN Scanner

Revenim la variabila inițială și obținem

$$F(x) = \frac{1}{ma^2} \ln \frac{e^{mx}}{a^2 + e^{mx}} + C, \quad x \in R.$$

12. Să se calculeze

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sin x + b^2 \cos x}{m^2 \sin x + n^2 \cos x} \, dx.$$

R. Să facem identificarea

$$a^2 \sin x + b^2 \cos x \equiv A(m^2 \sin x + n^2 \cos x) + B(m^2 \cos x - n^2 \sin x),$$

care ne conduce la sistemul

$$\begin{cases} a^2 = Am^2 - Bn^2, \\ b^2 = An^2 + Bm^2, \end{cases}$$

cu soluția

$$A = \frac{m^2a^2 + n^2b^2}{m^4 + n^4}, \quad B = \frac{m^2b^2 - n^2a^2}{m^4 + n^4},$$

de unde rezultă

$$\frac{a^2 \sin x + b^2 \cos x}{m^2 \sin x + n^2 \cos x} = \frac{m^2a^2 + n^2b^2}{m^4 + n^4} + \frac{m^2b^2 - n^2a^2}{m^4 + n^4} \cdot \frac{m^2 \cos x - n^2 \sin x}{m^2 \sin x + n^2 \cos x},$$

iar I se scrie

$$I = \frac{m^2a^2 + n^2b^2}{m^4 + n^4} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{m^2b^2 - n^2a^2}{m^4 + n^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2 \cos x - n^2 \sin x}{m^2 \sin x + n^2 \cos x} \, dx;$$

însă

$$(m^2 \cos x - n^2 \sin x) \, dx = d(m^2 \sin x + n^2 \cos x),$$

deci

$$I = \frac{m^2a^2 + n^2b^2}{m^4 + n^4} \frac{\pi}{2} + \frac{m^2b^2 - n^2a^2}{m^4 + b^4} \ln (m^2 \sin x + n^2 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}},$$

sau

$$I = \frac{m^2a^2 + n^2b^2}{m^4 + n^4} \frac{\pi}{2} + \frac{m^2b^2 - n^2a^2}{m^4 + n^4} \ln \frac{m^2}{n^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

13. Să se calculeze

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}}.$$

R. Observăm că integrala se mai poate scrie

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{\sin x \sqrt{2 - \sin^2 x}},$$

ceea ce sugerează schimbarea de variabilă $\sin x = t$, $d(\sin x) = dt$; intervalul $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ se transformă în $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$. Avem aşadar

$$I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{dt}{t\sqrt{2 - t^2}} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{t\,dt}{t^2\sqrt{2 - t^2}} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{d(t^2 - 2)}{t^2\sqrt{2 - t^2}},$$

unde punem $2 - t^2 = u^2$, $-2t\,dt = 2u\,du$; intervalul $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ se transformă în $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$. Obţinem

$$I = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{-2u\,du}{(2 - u^2)u} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{du}{u^2 - 2},$$

deci

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u - \sqrt{2}}{u + \sqrt{2}} \right| \Bigg|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}} \right).$$

14. Să se calculeze

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin x + b^2 \cos x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Numitorul îl scriem în modul următor

$$a^2 \sin x + b^2 \cos x = a^2 \left(\sin x + \frac{b^2}{a^2} \cos x \right),$$

apoi punem $\frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg} \varphi$; cu această notație avem

$$a^2 \sin x + b^2 \cos x = \frac{a^2}{\cos \varphi} (\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi),$$

sau

$$a^2 \sin x + b^2 \cos x = \frac{a^2}{\cos \varphi} \sin (x + \varphi), \quad \varphi = \text{const.}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{a^2} \frac{dx}{\sin (x + \varphi)} = \frac{\cos \varphi}{a^2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

sau

$$I = \frac{\cos \varphi}{a^2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b^2}{a^2} \right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}},$$

deci

$$I = \frac{\cos \varphi}{a^2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b^2}{a^2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b^2}{a^2} \right)} \right|.$$

15. Să se calculeze

$$F(a) = \int_0^a \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)},$$

apoi să se calculeze $\lim_{a \to \infty} F(a)$.

R. Observăm că $x \, dx = \frac{1}{2} d(x^2)$ deci se impune schimbarea de variabilă $x^2 = u$; avem:

$$F(a) = \int_0^a \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)} = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} \frac{du}{(u + 1)(u + 2)(u + 3)};$$

descompunem fracția de integrat în elemente simple

$$\frac{1}{(u + 1)(u + 2)(u + 3)} = \frac{A}{u + 1} + \frac{B}{u + 2} + \frac{C}{u + 3},$$

deci $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$;

obținem

$$F(a) = \frac{1}{4}\int_0^{a^2} \frac{du}{u+1} - \frac{1}{2}\int_0^{a^2} \frac{du}{u+2} + \frac{1}{4}\int_0^{a^2} \frac{du}{u+3}$$

sau

$$F(a) = \left[\frac{1}{4}\ln|u+1| - \frac{1}{2}\ln|u+2| + \frac{1}{4}\ln|u+3|\right]_0^{a^2},$$

$$F(a) = \frac{1}{4}\ln\frac{(a^2+1)(a^2+3)}{(a^2+2)^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3};$$

deoarece

$$\lim_{a\to\infty}\frac{(a^2+1)(a^2+3)}{(a^2+2)^2} = 1,$$

rezultă că

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{4}\ln\frac{(a^2+1)(a^2+3)}{(a^2+2)^2} = 0$$

și rămîne

$$\lim_{a\to\infty} F(a) = \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}.$$

16. Să se calculeze

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(a^2 e^x + b^2 e^{-x})(c^2 e^x + d^2 e^{-x})}.$$

R. Facem schimbarea de variabilă $e^x = u$, $e^x dx = du$ deci $dx = \frac{1}{u}du$. Dacă în $e^x = u$, facem $x = 0$, obținem $u = 1$; apoi $x = 1$, avem $u = e$ deci noile limite sînt 1 și e

$$I = \int_1^e \frac{du}{u\left(a^2u + b^2\frac{1}{u}\right)\left(c^2u + d^2\frac{1}{u}\right)},$$

sau

$$I = \int_1^e \frac{u\,du}{(a^2u^2 + b^2)(c^2u^2 + d^2)};$$

deoarece $u\,du = \frac{1}{2}du^2$ se recomandă să mai facem o schimbare de variabilă $u^2 = t$, $u\,du = \frac{1}{2}dt$; în noua integrală limitele sînt 1 și e^2.

$$I = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \frac{dt}{(a^2t + b^2)(c^2t + d^2)}$$

descompunem în elemente simple integrantul

$$\frac{1}{(a^2t+b^2)(c^2t+d^2)} = \frac{A}{a^2t+b^2} + \frac{B}{c^2t+d^2},$$

$$A = \frac{a^2}{a^2d^2-b^2c^2},\quad B = \frac{-c^2}{a^2d^2-b^2c^2};$$

obținem

$$I = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{a^2d^2-b^2c^2}\ln(a^2t+b^2) - \frac{1}{2}\frac{1}{a^2d^2-b^2c^2}\ln(c^2t+d^2)\right]_1^{e^2},$$

$$I = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2d^2-b^2c^2}\left(\ln\frac{b^2e^2+b^2}{a^2+b^2} - \ln\frac{c^2e^2+d^2}{c^2+d^2}\right),$$

sau

$$I = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2d^2-b^2c^2}\ln\frac{(a^2e^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2e^2+d^2)(a^2+b^2)}.$$

17. Să se calculeze integrala definită

$$I = \int_{-1}^{+1}\ln\left(\frac{|x|+1}{x^2+1}\right)dx.$$

R. Funcția $\ln\frac{|x|+1}{x^2+1}$ este pară, deci avem:

$$I = 2\int_0^1\ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx$$

pe care o integrăm prin părți: $u = \ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$, $dv = dx$

$$v = x,\ du = \frac{x^2+1}{x+1}\cdot\frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}dx = \frac{-x^2-2x+1}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

prin urmare

$$I = 2x\ln\frac{x+1}{x^2+1}\Big|_0^1 + 2\int_0^1\frac{x(x^2+2x-1)}{(x+1)(x^2+1)}dx.$$

$$\frac{x(x^2+2x-1)}{(x+1)(x^2+1)} = 1 + \frac{x^2-2x-1}{(x+1)(x^2+1)},$$

$$\frac{x^2-2x-1}{(x+1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $A = 1$, $B = 0$, $C = -2$; obținem:

$$\int_0^1 \frac{x(x^2+2x-1)}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = x\Big|_0^1 + \ln|x+1|\Big|_0^1 - 2\operatorname{arctg} x\Big|_0^1$$

$$= 1 + \ln 2 - 2\frac{\pi}{4},$$

deci

$$I = 2 + \ln 4 - \pi.$$

18. Să se calculeze

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$$

R. Avem $\dfrac{1}{1+\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\dfrac{1}{2+\operatorname{tg}^2 x}$

deci

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2+\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2+\operatorname{tg}^2 x}\,d(\operatorname{tg} x);$$

deci se impune să luăm $\operatorname{tg} x = u$; în această situație avem $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to [0, 1]$,

$$I = \int_0^1 \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg} \frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

19. Să se arate că

$$\int_0^{\pi} \frac{x\cos^2 ax}{1+x^2}\,dx < \frac{\pi}{2}.$$

R. Avem $\dfrac{x\cos^2 ax}{1+x^2} \leqslant \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in [0, \pi]$

deci

$$\int_0^{\pi} \frac{x\cos^2 ax}{1+x^2}\,dx \leqslant \int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Funcția $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ este continuă și derivabilă pe $[0, \pi]$; căutăm maximul acestei funcții pe $[0, \pi]$. Avem

$$f'(x) = \frac{1 + x^2 - 2x \cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1+x^2)^2};$$

în punctul $x_1 = 1$, $f(x)$ are un extremum.

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2 \cdot 2x(1+x^2)(1-x^2)}{(1+x^2)^4}, \quad f''(+1) < 0$$

deci punctul $x = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$ este un punct de maxim

$$\int_0^\pi \frac{x \cos^2 ax}{1+x^2}\,dx \leqslant \int_0^\pi \frac{x\,dx}{1+x^2} < \frac{1}{2}\int_0^\pi dx = \frac{\pi}{2}.$$

În același mod se arată că pentru orice funcție $g(x)$ integrabilă pe $[0, \pi]$ cu $|g(x)| \leqslant 1$ avem

$$-\frac{\pi}{2} < \int_0^\pi \frac{x\,g(x)}{1+x^2}\,dx < \frac{\pi}{2}.$$

20. Dacă notăm cu

$$I_n = \int \operatorname{ctg}^n x\,dx, \qquad n \text{ număr natural},$$

să se arate că avem formula de recurență

$$I_n = -\frac{1}{n-1}\operatorname{ctg}^{n-1} x - I_{n-2},$$

apoi să se deducă expresia lui I_n pentru cazul par sau impar.

R. Putem scrie

$$\operatorname{ctg}^n x = \operatorname{ctg}^{n-2} x \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg}^{n-2} x \frac{1}{\sin^2 x} - \operatorname{ctg}^{n-2} x,$$

deci

$$\int \operatorname{ctg}^n x\,dx = -\int \operatorname{ctg}^{n-2} x\,dx - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\,d(\operatorname{ctg} x),$$

sau

$$\int \operatorname{ctg}^n x\,dx = -\int \operatorname{ctg}^{n-2} x\,dx - \frac{1}{n-1}\operatorname{ctg}^{n-1} x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Am obținut formula de recurență din enunț

$$I_n = -I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\operatorname{ctg}^{n-1}x.$$

Pentru $n = 2m$ avem:

$$I_{2m} = -I_{2m-2} - \frac{1}{2m-1}\operatorname{ctg}^{2m-1}x,$$

$$I_{2m-2} = -I_{2m-4} - \frac{1}{2m-3}\operatorname{ctg}^{2m-3}x,$$

. . . . . .

$$I_2 = -I_0 - \operatorname{ctg} x,$$

deci

$$I_{2m} = -\frac{1}{2m-1}\operatorname{ctg}^{2m-1}x + \frac{1}{2m-3}\operatorname{ctg}^{2m-3}x - \ldots + (-1)^m\operatorname{ctg} x + (-1)^m x + C.$$

Pentru $n = 2m + 1$ obținem în mod analog

$$I_{2m+1} = -I_{2m-1} - \frac{1}{2m}\operatorname{ctg}^{2m}x,$$

$$I_{2m-1} = -I_{2m-3} - \frac{1}{2m-2}\operatorname{ctg}^{2m-2}x,$$

. . . . . .

$$I_3 = -I_1 - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x,$$

și pentru că

$$I_1 = \int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

rezultă I_{2m+1}:

$$I_{2m+1} = -\frac{1}{2m}\operatorname{ctg}^{2m}x + \frac{1}{2m-2}\operatorname{ctg}^{2m-2}x - \ldots + (-1)^m\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + (-1)^m\ln|\sin x| + C.$$

21. Dacă notăm

$$I_n = \int (ax+b)^n \cos hx\,dx,$$

$$K_n = \int (ax+b)\ \sin hx\,dx,\ n \text{ număr natural}$$

să se stabilească formulele de recurență

$$I_n = \frac{1}{h}(ax+b)^n \sin\ hx + \frac{na}{h^2}(ax+b)^{n-1}\cos\ hx - \frac{n(n-1)a^2}{h^2}I_{n-2},$$

$$K_n = -\frac{1}{h}(ax+b)^n \cos\ hx + \frac{na}{h^2}(ax+b)^{n-1}\sin hx - \frac{n(n-1)a^2}{h^2}K_{n-2}.$$

R. Integrăm prin părți

$$I_n = \int (ax + b)^n \cos hx \, dx,$$

$$(ax + b)^n = u, \quad \cos hx \, dx = dv, \quad du = na(ax + b)^{n-1} \, dx,$$

$$v = \frac{1}{h} \sin hx; \text{ obținem}$$

$$I_n = \frac{1}{h} (ax + b)^n \sin hx - \frac{na}{h} (ax + b)^{n-1} \sin hx \, dx.$$

Procedăm la fel și cu K_n

$$K_n = \int (ax + b)^n \sin hx \, dx,$$

$$(ax + b)^n = u, \quad \sin hx \, dx = dv, \quad du = na(ax + b)^{n-1} \, dx,$$

$$v = -\frac{1}{h} \cos hx; \text{ rezultă}$$

$$K_n = -\frac{1}{h} (ax + b)^n \cos hx + \frac{na}{h} \int (ax + b)^{n-1} \cos hx \, dx.$$

Am obținut astfel sistemul

$$\left.\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{h} (ax + b)^n \sin hx - \frac{na}{h} K_{n-1}, \\ K_n &= -\frac{1}{h} (ax + b) \cos hx + \frac{na}{h} I_{n-1}, \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

în ultima relație înlocuim pe n cu $n - 1$, apoi pe K_{n-1} îl ducem în prima; rezultă

$$I_n = \frac{1}{h} (ax + b)^n \sin hx + \frac{na}{h^2} (ax + b)^{n-1} \cos hx - \frac{n(n-1)a^2}{h^2} I_{n-2};$$

în prima relație din (α) înlocuim pe n cu $n - 1$, apoi ducem pe I_{n-1} în a doua relație; ne dă

$$K_n = -\frac{1}{h} (ax+b)^n \cos hx + \frac{na}{h^2} (ax + b)^{n-1} \sin hx - \frac{n(n-1)a^2}{h^2} K_{n-2}$$

care sînt relațiile de recurență căutate.

22. Să se stabilească formule de recurență pentru integralele

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^n x}, \qquad K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^n x}, \; n \text{ număr natural}$$

Să se calculeze I_3 și K_4.

Scanned with OKEN Scanner

B. Punem în I_n

$$\frac{1}{\sin^{n-2} x} = u, \qquad \frac{dx}{\sin^2 x} = dv,$$

deci

$$du = -\frac{(n-2)\cos x\, dx}{\sin^{n-1} x}, \qquad v = \frac{-\cos x}{\sin x},$$

şi folosim formula de integrare prin părţi

$$I_n = \frac{-\cos x}{\sin^{n-1} x}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - (n-2)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin^n x},$$

în care dacă înlocuim pe $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ rezultă

$$I_n = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} - (n-2)(I_n - I_{n-2}),$$

sau

$$I_n = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2},$$

care este formula de recurenţă căutată. Avem

$$I_3 = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} I_1, \quad I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}},$$

$$I_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}.$$

Pentru K_n procedăm în mod asemănător

$$\frac{1}{\cos^n x} = \frac{1}{\cos^{n-2} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \text{ şi punem}$$

$$\frac{1}{\cos^{n-2} x} = u, \quad du = \frac{(n-2)\sin x}{\cos^{n-1} x} dx,$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = dv, \quad v = \frac{\sin x}{\cos x};$$

folosim formula de integrare prin părţi

$$K_n = \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - (n-2)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^n x} dx;$$

Scanned with OKEN Scanner

punem $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ și obținem

$$K_n = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} - (n-2)(K_n - K_{n-2});$$

deci formula de recurență este

$$K_n = \frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2};$$

pentru $n = 4$ obținem

$$K_4 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$K_4 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{2}{3}\frac{\sin x}{\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{2}{3}.$$

Observație. În I_n să facem schimbarea de variabilă $u = \frac{\pi}{2} - x$ avem, $du = -dx$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos x$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[\frac{\pi}{4}, 0\right]$ deci

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^n x} = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{du}{\cos^n u} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n u} = K_n.$$

23. Să se calculeze

$$F(a) = \int_a^1 x^n \ln x \, dx, \quad 0 < a < 1, \quad n > 0,$$

apoi să se efectueze $\lim_{a \to 0+} F(a)$.

R. Integrăm prin părți: $x^n dx = du$, $\ln x = v$,

$$u = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad \frac{1}{x} dx = dv,$$

$$F(a) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x \Big|_a^1 - \frac{1}{n+1}\int_a^1 x^n \, dx,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$F(a) = -\frac{1}{n+1}\, a^{n+1} \ln a - \frac{1}{(n+1)^2}\,(1 - a^{n+1}).$$

În continuare avem

$$\lim_{a\to 0+} F(a) = -\frac{1}{n+1} \lim_{a\to 0+} a^{n+1} \cdot \ln a - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \lim_{a\to 0+} a^{n+1}.$$

Avem evident $\lim\limits_{a\to 0+} a^{n+1} = 0$ deoarece $n > 0$.

Avem, aplicînd regula lui l'Hospital, şi

$$\lim_{a\to 0+} a^{n+1} \ln a = \lim_{a\to 0+} \frac{\ln a}{a^{-n-1}} = \lim_{a\to 0+} \frac{\frac{1}{a}}{(-n-1)\, a^{-n-2}} = \lim_{a\to 0+} \frac{-1}{n+1}\, a^{n+1} = 0,$$

deci

$$\lim_{a\to 0+} F(a) = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

24. Să se calculeze

$$f(N) = \int_0^N x^4 \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x,$$

apoi să se efectueze $\lim\limits_{N\to\infty} f(N)$,

R. Stabilim o formulă de recurenţă pentru integrale nedefinite de forma

$$I_n = \int x^n \mathrm{e}^{\lambda x}\, \mathrm{d}x;$$

punem $x^n = u$, $\mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$, $\mathrm{d}u = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$,

$$v = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \text{ deci}$$

$$I_n = \frac{1}{\lambda}\, x^n \mathrm{e}^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} \mathrm{e}^{\lambda x}\, \mathrm{d}x,$$

şi formula de recurenţă este

$$I_n = \frac{1}{\lambda}\, x^n \mathrm{e}^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda}\, I_{n-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\lambda = -1$, $n = 4$ obținem

$$I_4 = -x^4 e^{-x} + 4I_3,$$

$$I_3 = -x^3 e^{-x} + 3I_2,$$

$$I_2 = -x^2 e^{-x} + 2I_1,$$

$$I_1 = -x e^{-x} + I_0 = -x e^{x} - e^{-x}.$$

$$f(N) = \left[-x^4 e^{-x} - 4x^3 e^{-x} - 12x^2 e^{-x} - 24x e^{-x} - 24e^{-x}\right]_0^N,$$

$$f(N) = -(N^4 + 4N^3 + 12N^2 + 24N + 24) e^{-N} + 24.$$

Să arătăm că pentru orice $\alpha \in R$ avem

$$\lim_{x \to \infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

Dacă $\alpha \leqslant 0$ este evident. Pentru $\alpha > 0$ aplicăm regula lui l'Hospital. Avem

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x},$$

de unde rezultă că pentru $n - 1 < \alpha < n$, n natural, aplicînd regula lui l'Hospital de n ori sîntem conduşi la calculul limitei

$$\lim_{x \to \infty} A \cdot x^\beta e^{-x}$$

cu $\beta < 0$, limită care are valoarea zero. Deducem de aici că

$$\lim_{N \to \infty} f(N) = 24.$$

25. Să se calculeze integralele definite

$$I_1 = \int_0^1 \operatorname{ch} mx \operatorname{sh} nx \, dx,$$

$$I_2 = \int_0^1 \operatorname{ch} mx \operatorname{ch} nx \, dx, \qquad n \neq m.$$

R. 1) Avem

$$\operatorname{ch} mx = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}, \quad \operatorname{sh} nx = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2},$$

deci

$$\operatorname{ch} mx \operatorname{sh} nx = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2} \cdot \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} = \frac{1}{4}\left[e^{(m+n)x} + e^{(m-n)x} - e^{(m-n)x} - e^{-(m+n)x}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sh}(m+n)x + \frac{1}{2} \operatorname{sh}(n-m)x,$$

$$\operatorname{ch} mx \operatorname{ch} nx = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2} \cdot \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2} = \frac{1}{4}\left[e^{(m+n)x} + e^{(-m+n)x} + e^{(m-n)x} + e^{-(m+n)x}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{ch}(m+n)x + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(m-n)x,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 [\operatorname{sh}(m+n)x + \operatorname{sh}(n-m)x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{m+n}\operatorname{ch}(m+n)x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n-m}\operatorname{ch}(n-m)x\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{ch}(m+n)}{m+n} + \frac{\operatorname{ch}(n-m)}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{n-m}\right].$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 [\operatorname{ch}(m+n)x + \operatorname{ch}(n-m)x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{m+n}\operatorname{sh}(m+n)x\Big|_0^1 + \frac{1}{n-m}\operatorname{sh}(n-m)\Big|_0^1,$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sh}(m+n)}{m+n} + \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sh}(n-m)}{n-m}.$$

26. Se consideră placa plană mărginită de

$$y = \operatorname{sh} x, \quad x = 0 \text{ și } y = 2 \quad \text{(fig. 47)}.$$

Se cere volumul corpului generat de această placă prin rotirea în jurul axei Ox.

R. Pentru $y = 2$ avem ecuația

$$\operatorname{sh} x = 2, \quad x = \operatorname{argsh} 2,$$

și pentru că $x = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$ rezultă ca punctul A are coordonatele $y_A = 2$ și $x_A = \ln(2+\sqrt{5})$.

Volumul V al corpului de rotație este diferența $V = V_1 - V_2$ unde V_2 este dat de integrala definită

$$V_2 = \pi \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \operatorname{sh}^2 x\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} (e^{2x} + e^{-2x} - 2)\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - 2x\right]_0^{\ln(2x\sqrt{5})},$$

$$V_2 = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}(2+\sqrt{5}) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2+\sqrt{5}} - 2\ln(2+\sqrt{5})\right],$$

$$V_2 = \pi\,\frac{4+2\sqrt{5}}{4} - \frac{\pi}{2}\ln(2+\sqrt{5}).$$

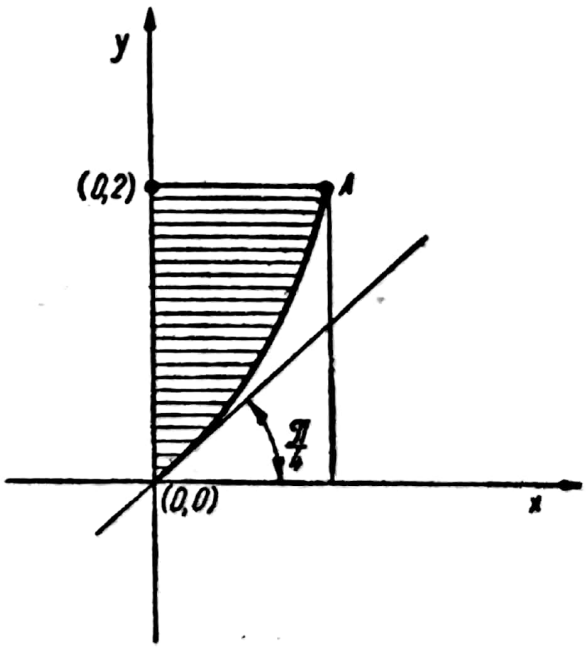


Fig. 47

iar $V_1 = 4\pi \cdot \ln\left(2+\sqrt{5}\right)$ este volumul cilindrului de rază $r=2$ și înălțime $h=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. Așa dar

$$V = \frac{9}{2}\pi \ln\left(2+\sqrt{5}\right) - \pi\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right).$$

27. Să se calculeze aria domeniului plan limitat de curbele

$$y = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad y=0 \text{ și } x=3.$$

R. Observăm că graficul funcției

$$y = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad x \geqslant 0,$$

trece prin origine și $y>0$ pentru $x>0$; prin urmare aria căutată este dată de integrala definită

$$A = \int_0^3 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Putem scrie

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{x+1-1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \text{ în continuare avem}$$

$$-\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2}\frac{2+x-x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{2}\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \text{ de unde rezultă}$$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{2}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+3)}.$$

Avem și

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}, \quad \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right),$$

deci avem identitatea

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} \equiv -\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2}\frac{1}{x+3},$$

am descompus astfel fracția de integrat în elemente simple. Integrăm

$$A = \int_0^3 \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2}\frac{1}{x+3}\right)dx.$$

$$A = -\frac{1}{2}\ln(x+1)\Big|_0^3 + 2\ln(x+2)\Big|_0^3 - \frac{3}{2}\ln(x+3)\Big|_0^3,$$

$$A = -\frac{1}{2}\ln 4 + 2\ln\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\ln\frac{6}{3} = \frac{1}{2}\ln\frac{5^4}{2^9} = \ln\frac{25}{16\sqrt{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

28. Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de curbele

$$y = \ln(x^2 + x + 1), \quad y = 0, \quad x = 4.$$

R. Observăm că graficul funcției

$$y = \ln(x^2 + x + 1), \quad x \geqslant 0,$$

trece prin origine. Deoarece $x^2 + x + 1 > 1$, $x > 0$ rezultă că graficul se găsește deasupra axei Ox pentru $x > 0$ prin urmare aria cerută este dată de integrala definită

$$A = \int_0^4 \ln(x^2 + x + 1)\,dx,$$

pe care o efectuăm prin părți. Punem $du = dx$,

$$v = \ln(x^2 + x + 1), \quad u = x, \quad dv = \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx,$$

$$A = x\ln(x^2 + x + 1)\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{2x^2 + x}{x^2 + x + 1}\,dx,$$

$$\frac{2x^2 + x}{x^2 + x + 1} = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1},$$

deci

$$A = x\ln(x^2 + x + 1)\Big|_0^4 - 2x\Big|_0^4 + \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1)\Big|_0^4 + I,$$

unde

$$I = \frac{3}{2}\int_0^4 \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{3}{2}\int_0^4 \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^4,$$

deci

$$A = 4\ln 21 - 8 + \frac{1}{2}\ln 21 + \sqrt{3}\left(\operatorname{arctg} 3\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

sau

$$A = \frac{9}{2}\ln 21 - 8 + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

29. Să se calculeze momentul de inerție față de punctul $O(0,0)$ al unei bare situată pe Ox între punctele $x = 0$ și $x = l$, de densitate variabilă $\rho(x) = \dfrac{k^2}{l^2 + x^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

R. Momentul de inerție cerut este dat de integrala definită

$$I_0 = \int_0^l x^2 \rho(x)\,dx = k^2 \int_0^l \frac{x^2}{l^2 + x^2}\,dx,$$

$$I_0 = k^2 \int_0^l \frac{x^2 + l^2 + l^2}{l^2 + x^2}\,dx = k^2 x \Big|_0^l - k^2 l \operatorname{Arctg} \frac{x}{l} \Big|_0^l$$

$$I_0 = k^2 \cdot l \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

30. Să se calculeze momentul de inerție față de punctul $O\,(0,0)$ al unei bare situată pe Ox între punctele $x = 0$ și $x = l$ de densitate variabilă $\rho\,(x) = \ln\,(l^2 + x^2)$.

R. Momentul de inerție este dat de integrala definită

$$I_0 = \int_0^l x^2 \ln\,(l^2 + x^2)\,dx,$$

integrăm prin părți: $x^2 \cdot dx = du$, $v = \ln(l^2 + x^2)$,

$$u = \frac{1}{3} x^3, \quad dv = \frac{2x\,dx}{l^2 + x^2}, \quad \text{deci}$$

$$I_0 = \frac{1}{3} x^3 \ln(l^2 + x^2) \Big|_0^l - \frac{2}{3} \int_0^l \frac{x^4}{l^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{3} l^3 \ln(2\,l^2) - \frac{2}{3} I',$$

$$I' = \int_0^l \frac{x^4}{x^2 + l^2}\,dx = \int_0^l \frac{x^4 - l^4 + l^4}{x^2 + l^2}\,dx = \int_0^l (x^2 - l^2)\,dx + l^4 \int_0^l \frac{dx}{x^2 + l^2},$$

$$I' = \left[\frac{1}{3} x^3 - l^2 x\right]_0^l + l^3 \operatorname{Arctg} \frac{x}{l} \Big|_0^l = -\frac{2}{3} l^3 + l^3 \frac{\pi}{4},$$

$$I_0 = \frac{1}{3} l^3 \ln(2l^2) + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} l^3 - l^3 \frac{\pi}{4}\right).$$

$$I_0 = \frac{l^3}{3} \left[\frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} + \ln(2l^2)\right].$$

31. Se dă funcția

$$f(x) = \sqrt{x} \operatorname{Arctg} x, \quad x \in [0, \infty)$$

și se cere să se găsească volumul corpului obținut prin rotația plăcii plane marginită de graficul funcției $f(x)$, dreptele $y = 0$ și $x = \sqrt{3}$, în jurul axei Ox.

Scanned with OKEN Scanner

R. Pe intervalul $[0, \sqrt{3}]$, graficul funcției $f(x)$ este situat deasupra axei Ox și pentru $x = 0$, $f(x) = 0$. Volumul corpului de rotație din enunț este dat de

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{Arctg}^2 x \, dx,$$

integrală pe care o efectuăm folosind metoda de integrare prin părți. Punem $du = x dx$, $v = \operatorname{Arctg}^2 x$, $u = \frac{1}{2} \cdot x^2$, $dv = \frac{2}{1+x^2} \operatorname{Arctg} x \, dx$, deci

$$V = \pi \frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg}^2 x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{Arctg} x \, dx,$$

$$(\alpha) \qquad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{Arctg} x \, dx = \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} x \, dx - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \operatorname{Arctg} x \, dx,$$

deci

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \operatorname{Arctg} x \, dx = \frac{1}{2} (\operatorname{Arctg} x)^2 \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{9}.$$

Prima integrală din partea a doua din (α) o efectuăm prin părți. Punem $du = dx$, $v = \operatorname{Arctg} x$; $u = x$, $dv = \frac{1}{1+x^2} dx$; obținem

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} x \, dx = x \operatorname{Arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x \, dx}{1+x^2} =$$

$$= \left[x \operatorname{Arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) \right]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \ln 4.$$

Cu aceste rezultate obținem

$$V = \pi \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} \pi + \ln 2 \right],$$

sau

$$V = \frac{2}{9} \pi^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \pi^2 + \pi \ln 2.$$

32. 1) Să se găsească momentul de inerție I_{Ox} față de axa Ox al plăcii plane omogene mărginită de curbele $y = \operatorname{ch} x$, $x = -a$, $x = a$ și $y = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Să se găsească volumul corpului obținut prin rotația plăcii în jurul axei Ox.

R. 1) Avem:

$$I_{Ox} = \frac{\rho_0}{3}\int_{-a}^{a} \operatorname{ch}^3 x\, dx$$

unde ρ_0 este densitatea plăcii presupusă constantă.
După cum se știe

$$\operatorname{ch}^3 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x}),$$

deci

$$I_{Ox} = \frac{\rho_0}{3}\int_{-a}^{a} \frac{1}{8}(e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x})dx,$$

$$I_{Ox} = \frac{\rho_0}{24}\left[\frac{1}{3}e^{3x} + 3e^x - 3e^{-x} - \frac{1}{3}e^{-3x}\right]_{-a}^{a},$$

$$I_{Ox} = \frac{\rho_0}{24}\left[\frac{1}{3}(e^{3a} - e^{-3a}) + 3(e^a - e^{-a}) + 3(e^a - e^{-a}) + \frac{1}{3}(e^{3a} - e^{-3a})\right] =$$

$$= \frac{\rho_0}{18}(\operatorname{sh} 3a + 9 \operatorname{sh} a).$$

2) Pentru calculul volumului folosim formula:

$$V = \pi\int_{-a}^{a} \operatorname{ch}^2 x\, dx,$$

însă

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}),$$

deci

$$V = \frac{\pi}{4}\int_{-a}^{a}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})dx,$$

$$V = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-a}^{a},$$

sau

$$V = \frac{\pi}{4}(2\operatorname{sh} 2a + 4a) = \frac{\pi}{2}(\operatorname{sh} 2a + 2a).$$

Scanned with OKEN Scanner

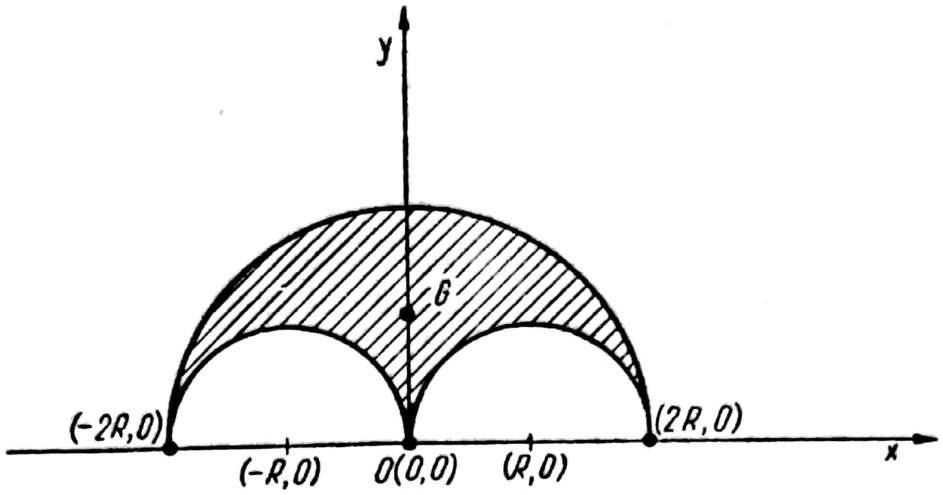


Fig. 48

33. Se dă o placă plană omogenă avînd conturul format din semicercul de centru (0,0) şi rază $2R$, situat deasupra axei Ox şi două semicercuri de centre $(-R, 0)$, $(R, 0)$ şi de raze R situate tot deasupra axei Ox (fig. 48). Folosind teorema lui Guldin să se găsească centrul de greutate al plăcii.

R. Folosim teorema lui Guldin care are următorul enunţ: volumul corpului generat prin rotaţia unei plăci plane în jurul unei axe care nu o traversează este egal cu aria suprafeţei plăcii înmulţită cu lungimea cercului descris de centrul de greutate al plăcii. Din motive de simetrie centrul de greutate G este pe axa Oy deci $x_G = 0$. Avem, conform teoremei lui Guldin

$$2\pi y_G S = V, \qquad V = V_1 - 2V_2,$$

unde $V_1 = \frac{4\pi}{3}(2R)^3 = \frac{32}{3}\pi R^3$ iar $V_2 = \frac{4\pi}{3}R^3$,

deoarece prin rotaţie semicercurilor se generează sfere, de raze $2R$ şi R. Avem:

$$V = \frac{32}{3}\pi R^3 - \frac{8\pi}{3}R^3 = 8\pi R^3,$$

$$S = S_1 - 2S_2 = \frac{1}{2}\pi(2R)^2 - 2\frac{1}{2}\pi R^2 = \pi R^2,$$

$$2\pi y_G \pi R^2 = 8\pi R^2, \quad y_G = \frac{4}{\pi}R.$$

34. Se dă o placă plană omogenă formată dintr-un disc semicircular de centru (0,0) şi rază R situat deasupra axei Ox din care se scot două triunghiuri isoscele de baze $[-R, 0]$ şi $[0, R]$ respectiv şi înălţime $h < \frac{1}{2}R$ (fig. 49).

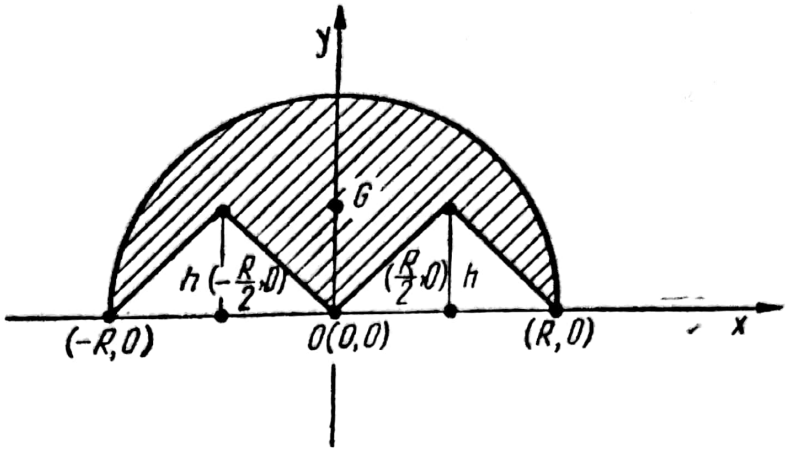


Fig. 49

Se cere să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii.

R. Pentru determinarea centrului de greutate al plăcii folosim teorema lui Guldin.

Din motive de simetrie G se găsește pe axa Oy deci $x_G = 0$. Coordonata y_G o obținem din relația:

$$2\pi y_G S = V,$$

unde $V = V_1 - 2V_2$, $S = S_1 - 2S_2$,

$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$ este volumul sferei obținută prin rotația semicercului iar $V_2 = \frac{1}{3} 2 \cdot \frac{R}{2} \cdot \pi h^2$ este volumul celor două conuri obținute prin rotația unuia din triunghiurile isoscele în jurul axei Ox. Avem:

$$V_1 - 2V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi Rh^2, \qquad S = \frac{1}{2}\pi R^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} Rh,$$

de unde

$$2\pi y_G \left(\frac{1}{2}\pi R^2 - Rh\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi Rh^2,$$

sau

$$\pi y_G(\pi R^2 - 2Rh) = \frac{2}{3}(2\pi R^3 - \pi Rh^2),$$

deci

$$y_G = \frac{2}{3}\,\frac{2R^2 - h^2}{\pi R - 2h}; \quad \text{dacă } h = \frac{1}{2}R \text{ atunci, } y_G = \frac{7}{6} \cdot \frac{R}{\pi - 1}.$$

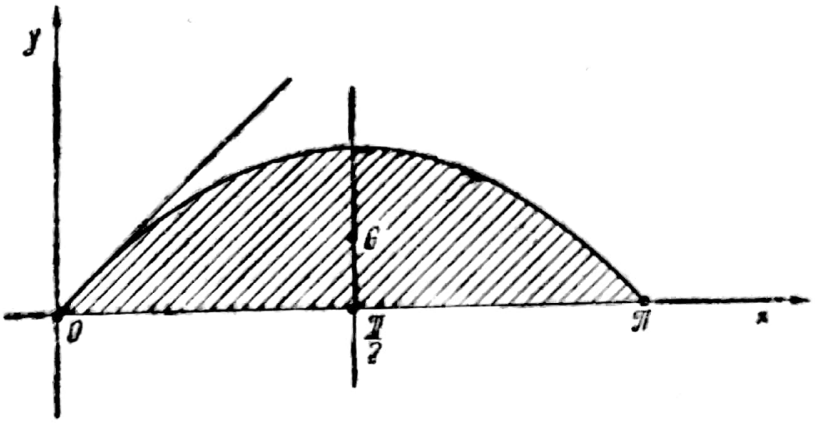


Fig. 50

35. Să se găsească centrul de greutate al unei plăci plane omogene mărginită de curbele $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ și axa Ox. Să se deducă apoi volumul corpului obținut prin rotația plăcii în jurul axei Ox.

R. Conform figurii 50, centrul de greutate se găsește pe dreapta $x_G = \frac{\pi}{2}$ din motive de simetrie. Rămîne de calculat y_G.

Avem:

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx}{\int_0^{\pi} \sin x \, dx},$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx;$$

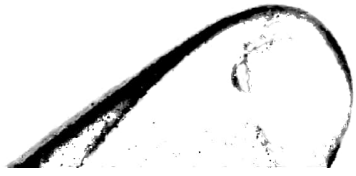
$$I_1 = \frac{1}{4}\left| x - \frac{1}{2}\sin 2x \right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2,$$

deci $x_G = \frac{\pi}{2}$, $y_G = \frac{\pi}{8}$.

Pentru calculul volumului corpului de rotație obținut prin rotația plăcii în jurul axei Ox folosim teorema lui Guldin. Avem:

$$V = 2\pi y_G \cdot S,$$



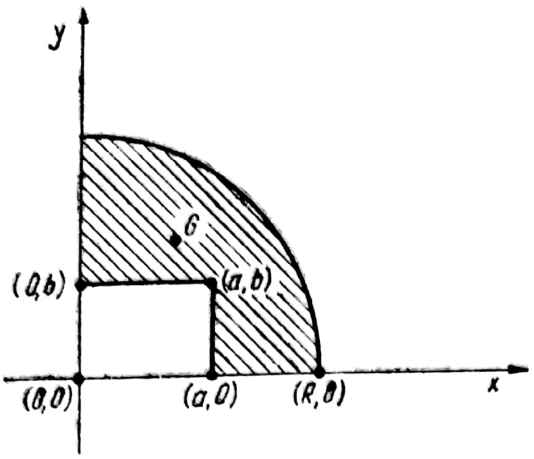


Fig. 51

insă

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \text{ şi } y_G = \frac{\pi}{8}, \text{ deci}$$

$$V = 2\pi \cdot \frac{\pi}{8} \cdot 2 = \frac{\pi^2}{2}.$$

36. Să se găsească centrul de greutate al unei plăci plane omogene formată dintr-un sfert de disc circular de centru (0, 0) şi rază R din care s-a scos un dreptunghi de laturi a şi b (fig. 51)

R. Folosim teorema lui Guldin. Dacă $G(x_G, y_G)$ este centrul de greutate al plăcii atunci prin rotaţia plăcii în jurul axei Ox avem:

$$2\pi y_G S = V,$$

unde $S = \frac{1}{4}\pi R^2 - ab$ iar

$$V = V_1 - V_2 \text{ cu } V_1 = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

V_1 fiind volumul semisferei obţinută prin rotaţia sfertului de cerc în jurul axei Ox şi $V_2 = \pi b^2 a$ volumul cilindrului obţinut prin rotaţia dreptunghiului în jurul axei Ox. Avem

$$2\pi y_G \left(\frac{1}{4}\pi R^2 - ab\right) = \frac{2}{3}\pi R^3 - \pi b^2 a,$$

deci

$$y_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{2R^3 - 3b^2 a}{\pi R^2 - 4ab}.$$

Dacă rotim placa în jurul axei Oy avem: $2\pi x_G S = V'$, unde S este acelaşi iar $V' = V_1 - V_2'$, $V_1' = \frac{2}{3}\pi R^3$ fiind volumul semisferei obţinute prin rotaţia semicercului în jurul axei Oy şi $V_2^1 = \pi a^2 b$, volumul cilindrului obţinut prin rotaţia dreptunghiului în jurul axei Oy.
Avem relaţia:

$$2\pi x_G \left(\frac{1}{4}\pi R^2 - ab\right) = \frac{2}{3}\pi R^3 - \pi a^2 b,$$

deci

$$x_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{2R^3 - 3a^2 b}{\pi R^2 - 4ab}.$$

Dacă $a = 0$, $b = 0$, obţinem

$$x_G' = \frac{4}{3\pi} R, \quad y_G' = \frac{4}{3\pi} R,$$

care sînt coordonatele centrului de greutate ale unui sfert de disc circular de centru (0, 0) şi rază R situat în primul cadran.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

Ecuaţii diferenţiale de ordinul I.

Ecuaţii cu variabile separabile. Soluţia generală. Soluţia problemei lui Cauchy. Ecuaţii diferenţiale de ordinul II.

Scanned with OKEN Scanner

1. Să se arate că funcţia

$$y(x) = x + \frac{2}{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}, \quad x \in (-1, +1) - \{0\},$$

verifică ecuaţia diferenţială

$$(x^2 - 1)\,y' + y^2 - 2xy + 1 = 0.$$

R. Funcţia $y(x)$ este derivabilă pe mulţimea de definiţie. Avem:

$$y' = 1 - \frac{2}{\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} \frac{x+1}{x-1} \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Calculăm expresia:

$$y^2 - 2xy = y(y - 2x) = \left(x + \frac{2}{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}\right)\left(-x + \frac{2}{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}\right) = \frac{4}{\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} - x^2.$$

Înlocuind aceste rezultate în ecuaţie obţinem:

$$(x^2 - 1)\left(1 - \frac{4}{x^2-1} \frac{1}{\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}\right) + \frac{4}{\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} + 1 - x^2 \equiv 0$$

care se verifică imediat.

2. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$xy\sqrt{x^2 - 1}\,dy = (y^2 + 1)(y^2 + 4)\,dx$$

apoi să se determine soluţia particulară care trece prin punctul $(\sqrt{2}, 1)$.

R. Se separă variabilele:

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{y\,dy}{(y^2+1)(y^2+4)};$$

Scanned with OKEN Scanner

integrăm

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{y\,dy}{(y^2+1)(y^2+4)} + C.$$

Pentru calculul integralei

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

punem $x^2 - 1 = t^2$, $2x\,dx = 2t\,dt$; obținem

$$\int \frac{x\,dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{t\,dt}{(t^2+1)t} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C';$$

revenind la variabila x rezultă că :

$$\int \frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{Arctg}\sqrt{x^2-1} + C'.$$

În integrala

$$\int \frac{y\,dy}{(y^2+1)(y^2+4)}$$

punem $y^2 = u$, $2y\,dy = du$ și obținem

$$\int \frac{ydy}{(y^2+1)(y^2+4)} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u+1)(u+4)},$$

$$\frac{1}{(u+1)(u+4)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{u+1} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{u+4},$$

deci

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{(u+1)(u+4)} = \frac{1}{6}\ln|u+1| - \frac{1}{6}\ln|u+4| + C'';$$

revenind la variabila y rezultă :

$$\int \frac{y\,dy}{(y^2+1)(y^2+4)} = \frac{1}{6}\ln\frac{y^2+1}{y^2+4} + C''.$$

Integrala generală a ecuației din enunț este :

$$6\operatorname{Arctg}\sqrt{x^2-1} = \ln\frac{y^2+1}{y^2+4} + C,$$

și este definită $x \in R - (-1, +1)$.

Determinăm soluția particulară care trece prin punctul $(\sqrt{2}, 1)$. Trebuie să avem :

$$6\operatorname{Arctg} 1 = \ln\frac{2}{5} + C,$$

deci $C = \frac{3}{2}\pi + \ln\frac{5}{2}$. Obținem astfel soluția problemei lui Cauchy

$$6\operatorname{Arctg}\sqrt{x^2-1} = \ln\frac{y^2+1}{y^2+4} + \frac{3}{2}\pi + \ln\frac{5}{2}$$

cu $x \in R - (-1, +1)$.

3. Să se integreze ecuația diferențială

$$x^2(x+1)\,dy = y^2(y-1)\,dx$$

apoi să se determine soluția care trece prin punctul $(2, 2)$.

Scanned with OKEN Scanner

R. Se separă variabilele

$$\frac{dx}{x^2(x+1)} = \frac{dy}{y^2(y-1)};$$

integrăm:

$$\int \frac{dx}{x^2(x+1)} = \int \frac{dy}{y^2(y-1)} + C.$$

Avem:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{1-x^2+x^2}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1-x}{x^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2},$$

deci:

$$\int \frac{dx}{x^2(x+1)} = \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} = \ln|x+1| - \frac{1}{x} - \ln|x|;$$

în mod asemănător avem și:

$$\frac{1}{y^2(y-1)} = \frac{1-y^2+y^2}{y^2(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1+y}{y^2} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2},$$

deci

$$\int \frac{dy}{y^2(y-1)} = \int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y^2} = \ln|y-1| - \ln|y| + \frac{1}{y}.$$

Integrala generală este dată de:

$$\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + \frac{1}{y} + C$$

și cere ca $x \neq 0$, $x \neq -1$, $y \neq 0$, $y \neq 1$.

Determinăm constanta C astfel încît soluția să treacă prin punctul (2, 2)

$$\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -\ln 2 + \frac{1}{2} + C, \quad C = \ln 3 - 1$$

Soluția particulară căutată (soluția problemei lui Cauchy) este:

$$\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + \frac{1}{y} + \ln 3 - 1,$$

cu $x(x+1) \neq 0$, $y(y-1) \neq 0$. Se observă că ecuația admite și soluțiile $y = 0$ și $y = 1$.

4. Să se găsească soluția generală a ecuației diferențiale

$$y^2 + y'^2 = a^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Avem:

$$y' = \pm\sqrt{a^2 - y^2}, \quad y \in [-a, a],$$

am obținut două ecuații diferențiale la care se separă variabilele. Considerăm pe fiecare în parte

1) $y' = \sqrt{a^2 - y^2}$ sau

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = dx, \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} + C.$$

Pentru calculul integralei facem schimbarea de variabilă $y = a \sin t$, $dy = a \cos t\, dt$, deci

$$x = \int \frac{a \cos t}{a \cos t} dt = t + C;$$

însă

$$t = \arcsin \frac{y}{a}, \text{ deci}$$

$$x = \arcsin \frac{y}{a} + C \text{ sau } y = a \sin (x - C), \; x \in R.$$

2) $y' = -\sqrt{a^2 - y^2}$; procedînd în același mod rezultă soluția generală și în acest caz

$$y^* = a \sin (-x - C), \; x \in R.$$

Soluția generală a ecuației date este așadar

$$y = a \sin (C^* + x), \; x \in R,$$

unde C^* este o constantă reală oarecare.

Să verificăm soluția obținută. Avem:

$$y' = \pm a \cos (C^* \pm x),$$

$$y^2 + y'^2 = a^2 [\sin^2(C^* \pm x) + \cos^2(C^* \pm x)] = a^2.$$

5. Să se găsească soluția generală a ecuației diferențiale

$$y'^2 - a^2y^2 = b^2.$$

R. Avem

$$y' = \pm\sqrt{a^2y^2 + b^2}$$

am obținut două ecuații diferențiale la care se separă variabilele. Considerăm pe fiecare în parte:

1) $y' = \sqrt{a^2y^2 + b^2}$ sau

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2y^2 + b^2}} = dx, \; x = \int \frac{dy}{\sqrt{a^2y^2 + b^2}} + C$$

pentru calculul integralei efectuăm schimbarea de variabile

$$y = \frac{b}{a}\operatorname{sh} t,\quad \mathrm{d}y = \frac{b}{a}\operatorname{ch} t\ \mathrm{d}t;\ \text{obținem}$$

$$x = \int \frac{\frac{b}{a}\operatorname{ch} t\ \mathrm{d}t}{\sqrt{b^2\operatorname{sh}^2 t + b^2}} = \frac{1}{a}\int \mathrm{d}t$$

deci $ax = t - C$, $t = ax + C$. Însă

$\operatorname{sh} t = \frac{a}{b}y$; obținem astfel soluția generală dată de

$$y = \frac{b}{a}\operatorname{sh}(ax + C),\ x \in R,$$

2) Ecuația $y' = -\sqrt{a^2y^2 + b^2}$ se reduce la prima înlocuind pe x cu $-x$, de unde deducem imediat că soluția sa generală este

$$y = \frac{b}{a}\operatorname{sh}(-ax + C),\ x \in R,$$

prin urmare soluția generală a ecuației din enunț este

$$I = \frac{b}{a}\operatorname{sh}(C \pm ax),\ x \in R,$$

unde C este o constantă reală oarecare.

6. Să se integreze ecuația diferențială

$$y'' + 4y' = 0;$$

apoi să se determine soluția particulară care îndeplinește condițiile inițiale $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

R. Putem integra odată, deoarece dacă înmulțim cu $\mathrm{d}x$ avem:

$$y''\mathrm{d}x + 4y'\,\mathrm{d}x = 0 \text{ sau } \mathrm{d}(y') + 4\mathrm{d}(y) = 0$$

deci

$$y' + 4y = C.$$

Am obținut o ecuație în care se separă variabilele

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C - 4y \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{d}y}{C - 4y} = \mathrm{d}x;$$

integrăm

$$x + C^* = \int \frac{\mathrm{d}y}{C - 4y},\quad x + C^* = -\frac{1}{4}\ln(4y - C),$$

sau

$$4y - C = \mathrm{e}^{-4C^*} \cdot \mathrm{e}^{-4x}$$

și dacă punem $\mathrm{e}^{-4C^*} = A$, rezultă soluția căutată,

$$4y = C + A\mathrm{e}^{-4x},\ x \in R.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem și

$$4y' = -4Ae^{-4x};$$

dacă impunem condițiile inițiale rezultă sistemul

$$4 = C + A,\ 4 = -4A,$$

deci

$$A = -1, \quad C = 5;$$

soluția particulară căutată este

$$y = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}e^{-4x},\ x \in R.$$

Observație. Putem scrie ecuația astfel $\frac{y''}{y'} = -4$; integrăm, ln $y' = -4x + C$, $y' = C_1e^{-4x}$, $y = -\frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$ etc.

7. Să se integreze ecuația diferențială

$$y''^2 - 4x^2 = 0.$$

R. Avem $y''^2 - 4x^2 = (y'' - 2x)(y'' + 2x) = 0$; orice soluție a ecuației $y'' = 2x$ sau a ecuației $y'' = -2x$ este tot o soluție a ecuației din enunț. Le integrăm:

I) $y'' = 2x$; integrăm odată și obținem: $y' = x^2 + C_1$; mai integrînd odată, rezultă $y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2,\ x \in R.$

II) $y'' = -2x$; integrăm odată și obținem $y' = -x^2 + C_1'$; mai integrînd odată; avem:

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + C_1'x + C_2',\quad x \in R.$$

Fiecare din familiile de funcții

$$y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2,\quad x \in R,$$

sau

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + C_1'x + C_2',\quad x \in R,$$

este o soluție a ecuației din enunț. Să verificăm pe:

$$y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2,\quad x \in R.\ \text{Avem } y' = x^2 + C_1,$$

$y'' = 2x$; rezultă $(2x)^2 - 4x^2 \equiv 0,\ x \in R.$

8. Să se integreze ecuația diferențială

$$y'^2 + (2y - xy)y' - 2xy^2 = 0.$$

R. Considerată ca o ecuație în y' ecuația din enunț se scrie:

$$(y' - xy)(y' + 2y) = 0$$

prin urmare orice soluție a ecuației $y' - xy = 0$ sau a ecuației $y' + 2y = 0$ este tot o soluție a ecuației date.

a) În ecuația $y' - xy = 0$ se separă variabilele:

$$\frac{y'}{y} = x \quad \text{sau} \quad \frac{dy}{y} = x\,dx$$

ceea ce ne dă:

$$\ln y = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{sau} \quad y = Ae^{\frac{1}{2}x^2}.$$

b) În ecuația $y' + 2y = 0$ se separă de asemenea variabilele:

$$\frac{y'}{y} = -2 \quad \text{sau} \quad \frac{dy}{y} = -2\,dx$$

obținem:

$$\ln y = -2x + C \quad \text{sau} \quad y = A^*e^{-2x}.$$

Fiecare din funcțiile

$$y = Ae^{\frac{1}{2}x^2}, \quad y = A^*e^{-2x}, \quad x \in R,$$

unde A, A^* sînt constante arbitrare, este o soluție a ecuației date. Să verificăm pe $y = Ae^{\frac{1}{2}x^2}$; avem $y' = Axe^{\frac{1}{2}x^2}$, deci

$$x^2A^2e^{x^2} + (2A - xA)e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot xAe^{\frac{1}{2}x^2} - 2xA^2e^{x^2} = 0,$$

sau

$$x^2(A^2 - A^2)e^{x^2} + x(2A^2 - 2A^2)e^{x^2} \equiv 0.$$

9. Să se integreze ecuația diferențială

$$y'y'' + 2y\,y'' - (x + 1)\,y' - 2\,(x + 1)\,y = 0.$$

R. Observăm că ecuația se scrie:

$$y''(y' + 2y) - (x + 1)(y' + 2y) = 0$$

deci putem să dăm ca factor pe $y' + 2y$; obținem

$$(y'' - x - 1)(y' + 2y) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă că orice soluție a uneia din ecuațiile:

$$y'' = x + 1 \quad \text{sau} \quad y' + 2y = 0$$

este de asemenea o soluție a ecuației din enunț.

a) Ecuția $y'' = x + 1$, integrată odată dă:

$$y' = \frac{1}{2}x^2 + x + C;$$

integrată încă o dată ne dă:

(α) $$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Cx + C', \quad x \in R.$$

b) Ecuația $y' + 2y = 0$ se integrează imediat dacă observăm că se separă variabilele:

$$\frac{dy}{2y} = -dx, \quad \frac{1}{2}\ln|y| = -x + C^*,$$

$$\text{sau} \quad \ln|y| = -2x + C'', \quad y = e^{-2x+C''} = Ae^{-2x}.$$

Oricare din familiile de funcții

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Cx + C', \quad x \in R,$$

sau $y = Ae^{-2x}$, $x \in R$, unde C, C' și A sînt constante arbitrare, este soluție a ecuației din enunț. Să verificăm pe $y = Ae^{-2x}$.

Avem $y' = -2Ae^{-2x}$, $y'' = 4Ae^{-2x}$, deci

$$-2Ae^{-2x}4Ae^{-2x} + 2Ae^{-2x}4Ae^{-2x} + (x+1)2Ae^{-2x} - 2(x+1)\ Ae^{-2x} \equiv 0.$$

10. Să se integreze ecuația diferențială

$$y'^3 - xy'^2 - y^2y' + xy^2 = 0.$$

R. Considerată ca o ecuație algebrică y' observăm că $y' = y$, $y' = -y$ și $y' = x$ sînt soluții, deci ecuația diferențială admite factorizarea:

$$(y' - x)(y' - y)(y' + y) = 0.$$

Este evident că orice soluție a uneia din ecuațiile diferențiale:.

$$y' - x = 0, y' - y = 0 \text{ și } y' + y = 0$$

este soluție a ecuației date.

a) Ecuația $y' = x$ admite soluția generală

(α) $$y = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad x \in R.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Ecuația $y' = y$ admite soluția generală

$$(\beta) \qquad y = C'e^x, \qquad x \in R.$$

c) Ecuația $y' + y = 0$ admite soluția generală

$$(\gamma) \qquad y = C''e^{-x}, \qquad x \in R.$$

unde C, C', C'' sînt constante arbitrare. Oricare din familiile de funcții date de (α), (β) sau (γ) este o soluție a ecuației date.

Să verificăm soluția:

$$y = C'e^{-x}, \ x \in R.$$

Avem $y' = -C'e^{-x}$, $x \in R$,

$$(-C'e^{-x})^3 - x(-C'e^{-x})^2 - (-C'e^{-x})(C'e^{-x})^2 + x(C'e^{-x})^2 = 0,$$

sau

$$-C'^3e^{-3x} - xC'^2e^{-2x} + C'^3e^{-3x} + xC'^2e^{-2x} \equiv 0.$$

11. Să se determine soluția generală a ecuației

$$y'' + 4y = 4.$$

R. Înmulțim cu y'; obținem:

$$y''y' + 4yy' = 4y'$$

sau

$$\frac{1}{2}(y'^2)' + 2(y^2)' = 4y',$$

ecuație care poate fi integrată odată

$$\frac{1}{2}y'^2 + 2y^2 = 4y + C,$$

sau

$$y'^2 + 4(y-1)^2 = C' + 4;$$

rezolvată în raport cu y' ne dă două ecuații:

$$y' = \sqrt{C' + 4 - 4(y-1)^2}, \quad y' = -\sqrt{C' + 4 - 4(y-1)^2}.$$

a) În ecuația

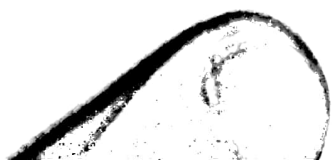
$$y' = \sqrt{C' + 4 - 4(y-1)^2}$$

se separă variabilele. Trebuie să avem $C' + 4 > 0$; deci dacă punem $C' + 4 = 4A^2$, obținem

$$\frac{dy}{2\sqrt{A^2 - (y-1)^2}} = dx, \quad \frac{du}{2\sqrt{A^2 - u^2}} = dx,$$

unde am pus $y - 1 = u$, $dy = du$. Avem

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{A^2 - u^2}} = x + C^*, \quad \int \frac{du}{\sqrt{A^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{A},$$



Scanned with OKEN Scanner

de unde deducem

$$\frac{1}{2}\arcsin\frac{2(y-1)}{\sqrt{(C'+4)}} = x + C^*,$$

sau

$$y - 1 = \frac{\sqrt{C'+4}}{2}\sin\,(2x + 2C^*), \quad x \in R.$$

b) Ecuația a doua ne dă în mod asemănător

$$y - 1 = -\frac{\sqrt{C'+4}}{2}\cdot\sin\,(2x + 2C^{**}),\ x \in R.$$

În ambele cazuri soluția se scrie

$$y - 1 = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x,\ x \in R,$$

C_1, C_2 fiind două constante arbitrare.

12. Să se integreze ecuația

$$y'y'' + yy''\sin x = 0.$$

R. Ecuația se mai poate scrie

$$y''(y' + y\sin x) = 0\ ,$$

deci orice soluție a ecuației $y'' = 0$ sau a ecuației $y' + y\sin x = 0$ este de asemenea soluție a ecuației din enunț.

a) Ecuația $y'' = 0$, integrată o dată dă $y' = C$. Ecuația $y' = C$ integrată încă o dată conduce la:

$$y = Cx + C^*, \qquad x \in R.$$

b) În ecuația $y' + y\sin x = 0$ se separă variabilele; avem

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \quad \text{sau} \quad \frac{dy}{y} = -\sin x\,dx;$$

prin integrare obținem:

$$\int\frac{dy}{y} = \int -\sin x dx + C_2 \text{ sau } \ln|y| = \cos x + C_1,$$

sau

$$y = Ae^{\cos x}, \qquad x \in R.$$

Fiecare din funcțiile

$$y = Cx + C^*, \qquad y = Ae^{\cos x}, \qquad x \in R,$$

verifică ecuația din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VI

Probleme compuse. Analiză matematică cu trigonometrie. Analiză matematică cu algebră. Analiză matematică cu geometrie. Analiză matematică cu trigonometrie şi algebră etc. Probleme date la examenele de admitere.

Scanned with OKEN Scanner

1. Se dă funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x \ln^2|x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

şi se cere:

1) să se arate că este continuă în origine însă nu este derivabilă în acest punct;

2) să se calculeze derivatele la dreapta şi la stînga în punctul $x = 0$;

3) să se calculeze

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx.$$

R. 1) Pentru a dovedi continuitatea lui $f(x)$ este suficient să arătăm că avem

$$f(0-) = f(0+) = f(0) = 0.$$

Avem

$$f(0-) = \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} x \ln^2 |x| = 0,$$

deoarece aplicînd regula lui l'Hospital obţinem

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\ln^2(-x)}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0-} \frac{2\frac{1}{x}\ln(-x)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0-} -2\frac{\ln(-x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0-} -2\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

În acelaşi mod se arată că

$$\lim_{0+ \leftarrow x} x \ln^2 x = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a arăta că $f(x)$ nu este derivabilă în punctul $x = 0$, pornim de la definiția derivatei într-un punct, anume calculăm

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

și această limită trebuie să existe și să fie *finită*. Avem

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \ln^2 |x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \ln^2 |x| = +\infty,$$

deci $f(x)$ nu este derivabilă în punctul $x = 0$.

2) Funcția $f(x)$ este derivabilă pe $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$. Calculăm derivatele lui $f(x)$ pe aceste două intervale.

Pe $(-\infty, 0)$, $f(x) = x \ln^2(-x)$,

$$f'(x) = \ln^2(-x) + 2x\left(\frac{1}{x}\right)\ln(-x) =$$

$$= \ln^2(-x) + 2\ln(-x) = \ln(-x)\,[\ln(-x) + 2]$$

și $\lim_{x \to 0-} f'(x) = +\infty$.

Pe $(0, +\infty)$ avem $f(x) = x \ln^2 x$,

$$f'(x) = \ln^2 x + 2x \frac{1}{x} \ln x = \ln x\,(\ln x + 2)$$

deci $\lim_{x \to 0+} f'(x) = +\infty$. Avem așadar

$$f'(0+) = f'(0-) = +\infty.$$

Funcția f are derivata în $x = 0$, însă nu este derivabilă în acest punct.

3) Pe $[0, 1]$ avem $x^2 f(x) = x^3 \ln^2 x$, deci

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^3 \ln^2 x\,dx;$$

integrăm prin părți, $dv = x^3\,dx$, $u = \ln^2 x$, $v = \frac{1}{4}x^4$, $du = 2\frac{1}{x}\ln x\,dx$; obținem

$$\int_0^1 x^3 \ln^2 x\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln^2 x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 \ln x\,dx.$$

Integrala

$$\int_0^1 x^3 \ln x\,dx$$

Scanned with OKEN Scanner

o integrăm tot prin părți; $u = \ln x$, $x^3 dx = dv$

$$du = \frac{1}{x} dx, \quad \frac{1}{4} x^4 = v; \text{ rezultă}$$

$$\int_0^1 x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 x^3 \, dx.$$

Obținem astfel

$$\int_0^1 x^3 \ln^2 x dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \ln^2 x - \frac{1}{8} x^4 \ln x + \frac{1}{32} x^4\right]_0^1 = \frac{1}{32}$$

pentru că $\lim_{x \to 0+} x^\alpha \ln^p |x| = 0$ pentru orice $\alpha > 0$.

2. Se dă ecuația

$$4(1 + a^2)x^4 - 8(a^2 + a + 1)x^3 - (a^2 - 16a + 1)x^2 + \\ + 2(a^2 + a + 1)x - 4a = 0$$

unde a este un parametru. Se cere:

1) să se rezolve ecuația știind că admite rădăcini raționale independente de a;

2) să se arate că oricare ar fi a real ecuația are trei rădăcini reale în intervalul $[-1, +1]$;

3) să se găsească valorile lui a pentru care ecuația dată are o rădăcină dublă;

4) să se determine valorile lui a pentru care avem relația

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{17}{2};$$

5) folosind teorema lui Rolle să se determine numărul de valori reale ale lui a pentru care

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a^2 x_1 x_2 x_3 x_4.$$

R. 1) Rădăcinile independente de a pot fi

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4};$$

$$f(+1) = -3a^2 + 6a - 3, \quad f(1-) = 9a^2 + 18a - 9;$$

valorile lui $f(+1)$ și $f(-1)$ trebuie să fie divizibile cu $p - q$ și $p + q$, $\frac{p}{q}$ fiind rădăcina

Scanned with OKEN Scanner

rațională, rezultă că nu pot fi rădăcini decît ± 2 și $\pm \frac{1}{2}$. Se găsesc

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad x_4 = \frac{2a}{1+a^2}.$$

2) Pentru orice $a \in R$ avem

$$-1 \leqslant \frac{2a}{1+a^2} \leqslant 1,$$

deoarece $1 + a^2 \geqslant 2|a|$; prin urmare pentru orice $a \in R$,

$$x_4 \in [-1, +1]; \text{ deci } x_2, x_3, x_4 \in [-1, +1].$$

3) Ecuația dată are o rădăcină dublă numai în cazurile

a) $x_2 = x_4$, $\frac{2a}{1+a^2} = -\frac{1}{2}$, $a^2 + 4a + 1 = 0$,

$$a_1 = -2 + \sqrt{3}, \quad a_2 = -2 - \sqrt{3}.$$

b) $x_3 = x_4$, $\frac{2a}{1+a^2} = \frac{1}{2}$, $a^2 - 4a + 1 = 0$,

$$a_3 = 2 + \sqrt{3}, \quad a_4 = 2 - \sqrt{3}.$$

4) Trebuie să avem

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{17}{4},$$

sau

$$\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{2},$$

sau

$$\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2 = 4, \quad \frac{2a}{1+a^2} = 2, \quad \frac{2a}{1+a^2} = -2,$$

cu soluțiile

$$a'_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad a'_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

5) Avem

$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{a}{1+a^2},$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\,\frac{a^2 + a + 1}{a^2 + 1}.$$

Ecuația de studiat este

$$f(a) = a^3 + 2a^2 + 2a + 2 = 0;$$

$$f'(a) = 3a^2 + 4a + 2 = 0,$$

derivata se anulează pentru

$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-6}}{3} = \frac{-2 \pm i\sqrt{2}}{3}.$$

Formăm şirul lui Rolle

$f(-\infty)$	$f(+\infty)$
$-\infty$	$+\infty$

deci există o singură valoare reală a lui a pentru care $f(a) = 0$. Avem $f(-1) = +1, f(-2) = -2$; rădăcina unică se găseşte in intervalul $(-2, -1)$.

Fără punct. 5 — 1970, Institutul Politehnic Bucureşti.

3. Se dă funcţia

$$f(x) = \frac{ax}{b^2 + x^2}, \quad x \in R, \quad a > 0.$$

Se cere:

1) să se calculeze ordonata punctului de inflexiune al graficului funcţiei $f(x)$ a cărui abscisă este strict pozitivă;

2) să se calculeze aria domeniului mărginit de graficul funcţiei $f(x)$, dreptele $x = 0$, axa Ox şi $x = c$ unde c este abscisa punctului de inflexiune de la pct. 1;

3) să se rezolve ecuaţia

$$8f(b \operatorname{tg} \varphi) = 7f(b \sin \varphi).$$

1969 — Institutul Politehnic Bucureşti

R. 1) Funcţia f admite derivate de orice ordin pe R. Calculăm derivata a doua a lui f.

$$f'(x) = \frac{a(b^2 + x^2) - 2xax}{(b^2 + x^2)^2} = \frac{ab^2 - ax^2}{(b^2 + x^2)^2},$$

$$f''(x) = \frac{-2ax\,(b^2 + x^2) - 4x\,(ab^2 - ax^2)}{(b^2 + x^2)^3},$$

$$f''(x) = \frac{2ax^3 - 6ab^2x}{(b^2 + x^2)^3},$$

$$f''(x) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{3}\,|b|, \quad x_3 = -\sqrt{3}\,|b|.$$

Punctul de inflexiune al graficului, cerut in problemă, are abscisa $c = \sqrt{3}\,|b|$; ordonata sa este dată de:

$$f(\sqrt{3}\,|b|) = \frac{a\sqrt{3}\,|b|}{4b^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{a}{|b|}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Aria $\mathcal{A}$ a domeniului plan definit în enunț este dată de:

$$\mathcal{A} = \int_0^c \frac{ax}{b^2 + x^2}\,dx = \frac{a}{2}\ln(b^2 + x^2)\Big|_0^{\sqrt{3}\,|b|},$$

sau

$$\mathcal{A} = \frac{a}{2}[\ln(4b^2) - \ln b^2] = a\ln 2.$$

Aria obținută este independentă de b.

3) Ecuația de la pct. 3 este

$$8\,\frac{ab\,\operatorname{tg}\varphi}{b^2 + b^2\operatorname{tg}^2\varphi} = 7\,\frac{ab\sin\varphi}{b^2 + b^2\sin^2\varphi},$$

iar pentru $a \neq 0$, $b \neq 0$, se reduce la

$$\frac{8\operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{7\sin\varphi}{1 + \sin^2\varphi},$$

sau

$$8\sin\varphi\cos\varphi = \frac{7\sin\varphi}{1 + \sin^2\varphi},$$

sau

$$\sin\varphi\,(16\cos\varphi - 8\cos^3\varphi - 7) = 0, \qquad (\alpha)$$

$$\sin\varphi = 0,\ \varphi_1 = k\pi,\ \cos\varphi_2 = \frac{1}{2},\ \varphi_2 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

Deoarece avem:

$8\cos^3\varphi - 16\cos\varphi + 7 = (2\cos\varphi - 1)(4\cos^2\varphi + 2\cos\varphi - 7)$ și ecuația $4u^2 + 2u - 7 = 0$, nu admite rădăcini în intervalul $[-1, +1]$ rezultă că ecuația (α) nu mai admite alte soluții.

4. Se dă funcția

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctg}\dfrac{1}{x}, & x \in R - \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

și se cere:

1) să se calculeze limitele laterale ale funcției $f(x)$ și $f'(x)$ în punctul $x = 0$, apoi să se traseze graficul funcției $f(x)$;

2) să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției, axa Ox și dreptele $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ și $x = \sqrt{3}$;

Scanned with OKEN Scanner

3) fie $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, un polinom cu coeficienții a, b, c, d, numere reale în progresie aritmetică și $d \neq 0$. În ipoteza că rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale acestui polinom sînt toate reale, să se arate că:

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = -\frac{\pi}{4}.$$

1970, Institutul Politehnic, București

R. Prin Arctg se înțelege determinarea principală a lui arctg, prin urmare mulțimea valorilor este $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, deci

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 0+} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2};$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{x^2 + 1}, \quad x \in R - \{0\}.$$

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0-} f'(x) = -1.$$

Graficul are pe $y = 0$ asimptotă orizontală deoarece

$$\lim_{x\to -\infty} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} = 0;$$

$$f''(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}, \quad x \in R - \{0\}.$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$				0				$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\|$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\|$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-\pi}{2}$		$\|$ 0	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$		0

Scanned with OKEN Scanner

Graficul este dat în figura 52.

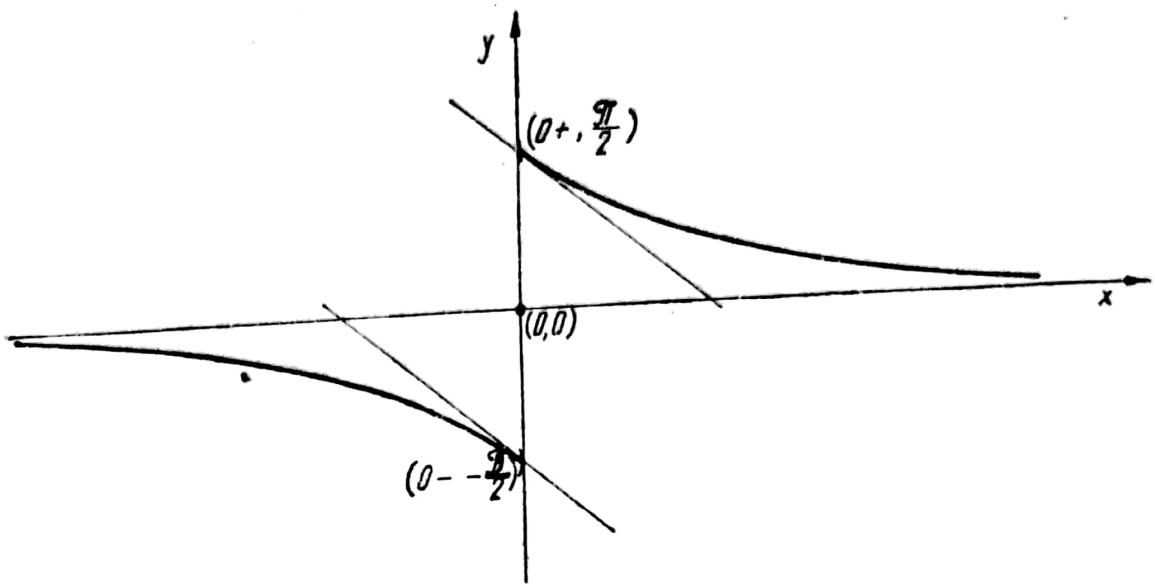


Fig. 52

2) Avem de calculat integrala definită

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}\, dx;$$

integrăm prin părți: $u = \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$, $dv = dx$,

$du = -\frac{1}{1+x^2}dx$, $v = x$; obținem

$$\mathcal{A} = x \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}dx = \left[x \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} + \ln \sqrt{1+x^2}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}$$

deci

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{18}\pi + \frac{1}{2}\ln 3.$$

3) Avem

$$S = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = \operatorname{Arctg} \frac{1}{x_1} + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x_2} + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x_3}.$$

Notăm $\operatorname{Arctg} \frac{1}{x_i} = y_i$ deci $\frac{1}{x_i} = \operatorname{tg} y_i$, $i = 1, 2, 3$; obținem

$$S = y_1 + y_2 + y_3, \quad \operatorname{tg} S = \operatorname{tg} (y_1 + y_2 + y_3) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} y_1 + \operatorname{tg} y_2 + \operatorname{tg} y_3 - \operatorname{tg} y_1 \operatorname{tg} y_2 \operatorname{tg} y_3}{1 - \operatorname{tg} y_1 \operatorname{tg} y_2 - \operatorname{tg} y_2 \operatorname{tg} y_3 - \operatorname{tg} y_3 \operatorname{tg} y_1};$$

revenind la x_i ne dă:

$$\operatorname{tg} S = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_1 x_2 x_3}}{1 - \frac{1}{x_1 x_2} - \frac{1}{x_2 x_3} - \frac{1}{x_3 x_1}},$$

sau

$$\operatorname{tg} S = \frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 - 1}{x_1 x_2 x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)}.$$

Folosind relațiile dintre rădăcini și coeficienți avem

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{c}{a}, \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a},$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg} S = \frac{\frac{c}{a} - 1}{-\frac{d}{a} + \frac{b}{a}} = \frac{c - a}{b - d},$$

și pentru că a, b, c, d sînt în progresie aritmetică $c - a = d - b$ deci, $\operatorname{tg} S = -1$; obținem astfel:

$$S = \operatorname{Arctg} (-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

5. Se dă funcția $f(x)$ definită astfel,

$$f(x) = \begin{cases} x \ln ax, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

unde a este un parametru real strict pozitiv. Se cere:

1) să se studieze variația funcției f și să se reprezinte grafic;

2) să se calculeze aria domeniului plan mărginit de graficul funcției, axa Ox și dreptele $x = x_1$, $x = x_2$ unde $x_1 > 0$ este rădăcina ecuației $f(x) = 0$ iar x_2 este abscisa punctului de extrem a lui $f(x)$;

Scanned with OKEN Scanner

3) considerînd x_1, x_2 ca fiind, în această ordine, primii termeni ai unei progresii geometrice cu o infinitate de termeni să se arate că progresia este descrescătoare, apoi să se calculeze:

$$\lim_{a \to 0+} (e^a - 1)S$$

unde S este suma progresiei.

1970 — Institutul Politehnic, București

R. 1) $f(x) = 0$ pentru $x_0 = 0$ și $ax = 1$, $x_1 = \frac{1}{a}$, $f'(x) = \ln ax + 1$, $f'(x) = 0$ pentru $x_2 = \frac{1}{ae}$. Deoarece $\frac{1}{e} < 1$ rezultă că $x_1 > x_2$.

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0, \qquad x \in (0, +\infty).$$

Tabloul de variație al funcției date este:

x	0		$\frac{1}{ae}$		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -$	0	$+\ +$	1	$+\ +\ +\ +\ +$		
$f''(x)$	$+\ +$	$+$	$+\ +$	$+$	$+\ +\ +\ +$		
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{ae}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			A		B		

Graficul este dat în figura 53.

În origine graficul are la dreapta semitangenta Oy' deoarece $f'(0+) = -\infty$.

2) Aria $\mathcal{A}$ a domeniului plan definit în enunț este dată de:

$$\mathcal{A} = -\int_{\frac{1}{ae}}^{\frac{1}{a}} x \ln ax \, dx = -\frac{x^2}{2} \ln ax \Big|_{\frac{1}{ae}}^{\frac{1}{a}} + \int_{\frac{1}{ae}}^{\frac{1}{a}} \frac{x^2}{t} \cdot \frac{1}{x} \, dx,$$

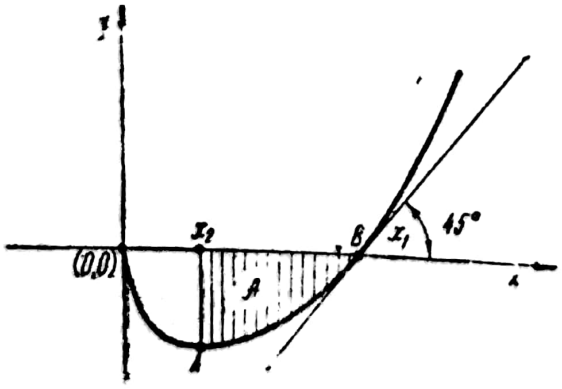


Fig. 53

$$\mathcal{A} = \left[-\frac{x^2}{2} \ln ax + \frac{x^2}{4} \right]_{\frac{1}{ae}}^{\frac{1}{a}} =$$

$$= -\frac{1}{2a^2e^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2e^2}\right) = \frac{e^2 - 3}{4ae^2}.$$

Am luat în fața integralei semnul minus pentru a obține pentru $\mathcal{A}$ un număr pozitiv.

Scanned with OKEN Scanner

3) Avem $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_1 = \frac{1}{ae}$, deci pentru $a > 0$, $x_1 > x_2$. Progresia geometrică cu primii doi termeni $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{ae}$, este descrescătoare cu raţia $\frac{1}{e}$.

Rezultă termenul general al seriei

$$u_{n+1} = \frac{1}{a} e^{-n},$$

iar suma S a seriei este

$$S = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{a} \frac{e}{e - 1}.$$

Avem

$$\lim_{a \to 0+} (e^a - 1) \frac{1}{a} \frac{e}{e - 1} = \frac{e}{e - 1},$$

deoarece $\lim_{a \to 0+} \frac{e^a - 1}{a} = \lim_{a \to 0+} e^a = 1$;

acest rezultat se obţine aplicind regula lui l'Hospital.

6. Se dau funcţiile

$$f_1(x) = \sin x - \cos x, \; f_2(x) = \sin^2 x - \cos^2 x, \; \ldots, \; f_n(x) = \\ = \sin^n x - \cos^n x,$$

cu n număr natural şi $x \in R$. Se cere:

1) folosind un singur sistem de axe de coordonate să se construiască graficele funcţiilor $f_1(x)$ şi $f_3(x)$ pe intervalul $[0, 2\pi]$; se vor determina punctele comune ale celor două grafice;

2) să se calculeze aria cuprinsă între graficele funcţiilor $f_1(x)$ şi $f_3(x)$ pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$;

3) să se verifice că pentru $n > 2$ există relaţia:

$$f_n''(x) + n^2 f_n(x) = n(n - 1) f_{n-2}(x).$$

1969 — Institutul Politehnic, Bucureşti.

R. 1) Se cer graficele lui $f_1(x)$ şi $f_3(x)$ pe $[0, 2\pi]$, deci vom determina punctele principale ale graficelor numai pe acest interval. a) Avem $f_1(x) = 0$, $\sin x = \cos x$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{5\pi}{4}$; graficul nu are asimptote verticale. $f_1'(x) = \cos x + \sin x$, $f_1'(x) = 0$,

$x_1' = \frac{3\pi}{4}$, $x_2' = \frac{7\pi}{4}$. Funcția $f_1(x)$ este mărginită în $[0, 2\pi]$ cu valori oscilînd între $\sqrt{2}$ și $-\sqrt{2}$. b) $f_2(x) = 0$, $\sin^3 x = \cos^3 x$; $x_1'' = \frac{\pi}{4}$, $x_2'' = \frac{5\pi}{4}$; graficul nu are asimptote verticale, orizontale și oblice. $f_2'(x) = 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$, $f_2'(x) = 0$, $x_1''' = 0$, $x_2''' = \pi$, $x_3''' = 2\pi$, $x_4''' = \frac{\pi}{2}$, $x_5''' = \frac{3\pi}{2}$, $x_6''' = \frac{3\pi}{4}$, $x_7''' = \frac{7\pi}{4}$.

Funcția $f_2(x)$ este de asemenea mărginită pe $[0, 2\pi]$. Se cer punctele comune celor două grafice. Aceste puncte se obțin rezolvînd ecuația $f_1(x) = f_3(x)$; deci:

$$\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x - \cos x,$$

sau

$$(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x - 1) = 0,$$

deci:

$$\sin x = \cos x \quad \text{și} \quad \sin x \cos x = 0;$$

$$f_1(x) = f_3(x) \text{ pentru } \xi_1 = \frac{\pi}{4}, \ \xi_2 = \frac{5\pi}{4}, \ \xi_3 = 0,$$

$$\xi_4 = \frac{\pi}{2}, \ \xi_5 = \pi, \ \xi_6 = \frac{3\pi}{2}, \ \xi_7 = 2\pi.$$

Tabloul de variație pentru $f_1(x)$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f_1'(x)$	$+$	$+$	$++$	0	$---$	$---$	0	$+++$	
$f_1(x)$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$	$1 \nearrow$	$\sqrt{2} \searrow$	$1 \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \searrow$	$-\sqrt{2} \nearrow$	-1

Tabloul de variație pentru $f_3(x)$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f_3(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$---$	0
$f_3(x)$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$	$1 \searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \nearrow$	$1 \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$	$\frac{-\sqrt{2}}{2} \searrow$	-1

Figura 54 conține graficele celor două funcții raportate la același sistem de axe.

Din figura 54 se vede că punctele de intersecție ale celor două grafice sînt:

$$(0, -1), \left(\frac{\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 1), \left(5\frac{\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right) \text{ și } (2\pi, -1).$$

Scanned with OKEN Scanner

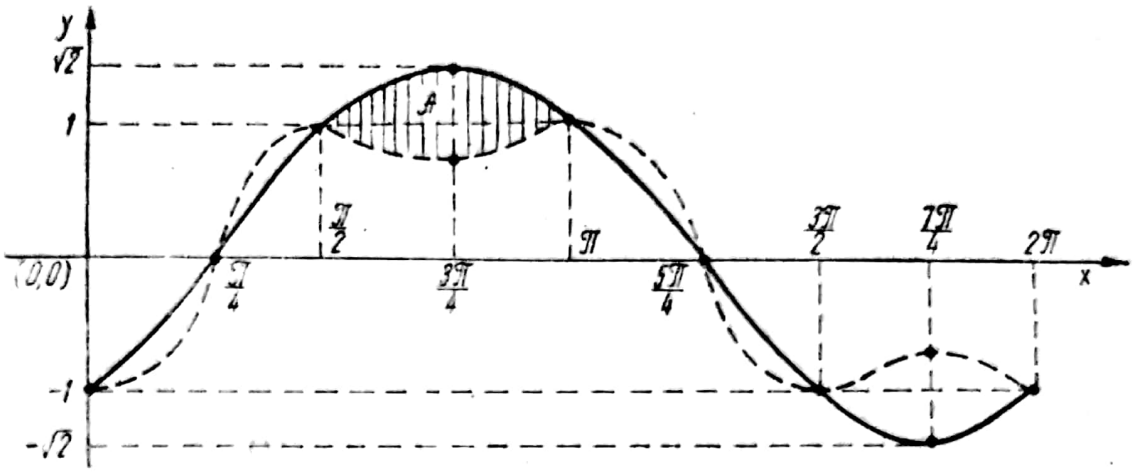


Fig. 54

Aria $\mathcal{A}$ a domeniului plan cuprins între cele două grafice și dreptele $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ este (fig. 54):

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin^3 x - \cos^3 x) dx;$$

însă

$$\int \sin^3 x\, dx = -\int \sin^2 x\, d(\cos x) = -\int (1 - \cos^2 x)\, d(\cos x) =$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C;$$

și

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x d(\sin x) = \int (1 - \sin^2 x)\, d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C';$$

în calculul integralei definite C și C' dispar, deci:

$$\mathcal{A} = \left[-\cos x - \sin x + \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{3}.$$

3) Pentru a verifica relația de la punctul 3) să calculăm pe $f_n''(x)$

Avem:

$$f_n'(x) = n \sin^{n-1} x \cos x + n \cos^{n-1} x \sin x,$$

$$f_n''(x) = n(n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - n \sin^n x - n(n-1) \cos^{n-2} x \sin^2 x + n \cos^n x.$$

deci

$$f_n''(x) + n^2 f_n(x) = n(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x - n\sin^n x - n(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2 x +$$
$$+ n\cos^n x + n^2(\sin^n x - \cos^n x) = n(n-1)\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x) - n\sin^n x -$$
$$- n(n-1)\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x) + n\cos^n x + n^2\sin^n x - n^2\cos^n x =$$
$$= n(n-1)(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x)$$

de unde obținem:

$$f_n''(x) + n^2 f_n(x) = n(n-1)f_{n-2}(x).$$

7. Intr-un semicerc cu centrul în O și rază R, limitat de diametrul AB, se consideră două raze perpendiculare OC și OD. Se notează cu x unghiul format de OC și OA, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Se cere:

1) să se exprime, în funcție de R și x, lungimile coardelor AC, CD, DB și aria patrulaterului $ACDB$; aceasta din urmă se va pune sub formă calculabilă prin logaritmi;

2) să se arate că nu există valori ale lui x pentru care CD este media aritmetică sau media geometrică a coardelor AC și DB;

3) se rotește figura în jurul diametrului AD; să se calculeze partea din volumul sferei care se află între planele perpendiculare pe AB care trec prin C și D să se determine valoarea maximă a acestui volum.

1969 — Institutul Politehnic, București.

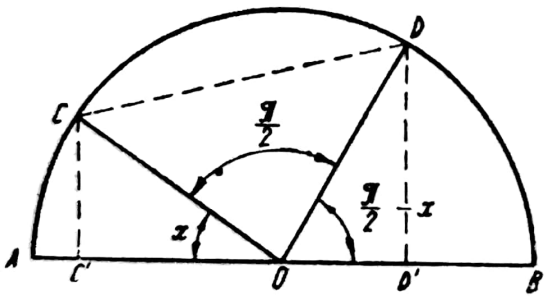


Fig. 55

R. 1) Conform figurii 55 avem:

$$AC = 2R\sin\frac{x}{2}, \quad CD = R\sqrt{2},$$

$$DB = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Aria S a patrulaterului $ACDB$ o scriem ca arie a trei triunghiuri

S = aria ACO + aria OCD + aria ODB,

$$\text{aria } ACO = \frac{1}{2}R^2\sin x, \quad \text{aria } OCD = \frac{1}{2}R^2;$$

$$\text{aria } ODB = \frac{1}{2}R^2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2}R^2\cos x,$$

deci

$$S = \frac{1}{2}R^2(\sin x + \cos x + 1), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \quad \cos x + 1 = 2\cos^2\frac{x}{2},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$S = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot 2 \cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right);$$

$$\sin \frac{x}{2} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right),$$

deci

$$S = \sqrt{2} R^2 \cos \frac{x}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

2) Pentru a arăta că $\overline{CD}$ nu poate fi media aritmetică a coardelor $\overline{AC}$ și $\overline{DB}$, trebuie să arătăm că ecuația:

$$2\sqrt{2}R = 2R \left[\sin \frac{x}{2} + \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right]$$

sau

$$\sqrt{2} = \sin \frac{x}{2} + \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right),$$

nu are soluții. Avem:

$$\sqrt{2} = 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2} \right),$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8},$$

sau

$$2 \cos \frac{\pi}{8} = \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2} \right),$$

însă

$$2 \cos \frac{\pi}{8} = 2 \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{1 + \sqrt{2}} > 1,$$

deci nu are soluții.

Pentru a arăta că $\overline{CD}$ nu poate fi medie geometrică a coardelor $\overline{AC}$ și $\overline{DB}$, procedăm în același mod. Trebuie să arătăm că ecuația:

$$2R^2 = 4R^2 \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

nu are soluții. Avem

$$\frac{1}{2} = \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

însă

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

deci

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos\frac{\pi}{4}\right],$$

sau

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1,$$

prin urmare și în acest caz nu sînt soluții.

3) Trebuie să calculăm segmentul $\overline{C'D'}$, C' și D' fiind proiecțiile lui C și D pe AB. Avem:

$$\overline{C'D'} = \overline{C'O} + \overline{OD'} = R(\sin x + \cos x),$$

$$V = V' + V'' + V''',$$

unde V' este volumul generat de sectorul cuprins între OC și OD, deci

$$V' = 2\pi R \cdot \overline{C'D'} \cdot \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^3(\sin x + \cos x);$$

V'' este volumul conului obținut prin rotirea triunghiului OCC', prin urmare

$$V'' = \frac{\pi}{3} R\cos x\, R^2 \sin^2 x = \frac{\pi}{3} R^3 \sin^2 x \cos x;$$

V''' este volumul conului obținut prin rotirea triunghiului ODD'

$$V''' = \frac{\pi}{3} R\sin x\, R^2 \cos^2 x = \frac{\pi}{3} R^3 \sin x \cos^2 x;$$

așadar

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi R^3[2(\sin x + \cos x) + \sin x \cos^2 x + \sin^2 x \cos x].$$

Pentru a determina extremele lui $V(x)$ anulăm derivata $V'(x)$,

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi R^3[2(\cos x - \sin x) + \cos^3 x - 2\sin^2 x \cos x + 2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x];$$

ecuația $V'(x) = 0$ ne dă:

$$2(\cos x - \sin x) + \cos^3 x - \sin^3 x + 2\sin x \cos x(\cos x - \sin x) = 0$$

sau

$$(\cos x - \sin x)(3 + 3\sin x \cos x) = 0.$$

În intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $V'(x) = 0$ numai pentru $x = \frac{\pi}{4}$. În acest punct V are un maxim dat de:

$$V_{max} = \frac{\sqrt{2}}{6} R^3.$$

8. Se dă funcția

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 1,\ x \in R,$$

și se cere:

1) să se arate că ecuația $f(x) = 0$ are o singură rădăcină reală;
2) dacă x_2, x_3 sînt cele două rădăcini complexe ale ecuației $f(x) = 0$ atunci partea lor reală aparține intervalului $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$;

3) să se arate că șirul cu termenul general $s_n = x_2^n + x_3^n$ este un șir cu termeni reali, convergent; să i se calculeze limita $\lim_{n\to\infty} s_n$.

1969 — Institutul Politehnic, București

R. 1) Folosim teorema lui Rolle. Avem:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,$$

$$f'(x) = 0, \quad 3x^2 - 2x - 1 = 0, \quad x_1 = \frac{1 + \sqrt{1+3}}{3} = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Formăm șirul lui Rolle

$f(-\infty)$	$f\left(-\frac{1}{3}\right)$	$f(1)$	$f(+\infty)$
$-$	$-\frac{22}{27}$	-2	$+$

deci ecuația are o singură rădăcină reală > 1;
deoarece $f(2) = 8 - 4 - 2 - 1 = 1 > 0$ rezultă că $x_1 \in (1, 2)$.

2) Fie $x_2 = \alpha + i\beta$, $x_3 = \alpha - i\beta$ celelalte două rădăcini ale ecuației $f(x) = 0$. Din relațiile între rădăcini și coeficienți obținem:

$$x_1x_2x_3 = 1, \quad x_2x_3 = \frac{1}{x_1} < 1, \quad |x_2x_3| < 1,$$

și pentru că $|x_2| = |x_3|$ rezultă că $|x_2| = |x_3| < 1$.

Din relația $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ obținem înlocuind pe x_2 și x_3

$$x_1 + 2\alpha = 1, \quad \alpha = \frac{1 - x_1}{2} < 0$$

și pentru că $1 < x_1 < 2$, $0 < x_1 - 1 < 1$, urmează

$$-\frac{1}{2} < \alpha = \frac{1 - x_1}{2} < 0.$$

3) Avem $s_n = x_2^n + x_3^n = (\alpha + i\beta)^n + (\alpha - i\beta)^n$,
dacă punem $\alpha = \rho\cos\theta$, $\beta = \rho\sin\theta$, $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

obținem, folosind formula lui Moivre,

$$x_2^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

$$x_3^n = \rho^n[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)] = \rho^n(\cos n\theta - i\sin n\theta),$$

deci

$$s_n = x_2^n + x_3^n = 2\rho^n\cos n\theta, \text{ real.}$$

Am arătat că $|x_2| < 1$, $|x_3| < 1$ deci $\rho < 1$, de unde rezultă imediat că

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (2\rho^n \cos n\theta) = 0, \text{ deoarece } \lim_{n\to\infty} \rho^n = 0,$$

prin urmare șirul s_n are termenii reali, este convergent și are limita zero.

9. Se dă ecuația

$$2x^5 + x^4 \sin 4a - x^3 \sin 3a + x^2 \sin 2a - x \sin a + 2 = 0,$$

unde a este un parametru real.

1) Să se afle valorile lui a pentru care ecuația admite rădăcina

$$x = -1.$$

2) Folosind teorema lui Rolle să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației date în cazul particular cînd $a = \frac{\pi}{2}$.

3) Să se arate că oricare ar fi $a \in R$ ecuația dată nu admite pe $x = -1$ ca rădăcină dublă.

1970 — Institutul Politehnic, București.

R. 1) Pentru ca polinomul $P(x)$ să se dividă cu $x + 1$ trebuie ca $P(-1) = 0$. Această condiție, în cazul nostru, duce la relația:

$$\sin 4a + \sin 3a + \sin 2a + \sin a = 0,$$

sau

$$2 \sin \frac{5a}{2} \cos \frac{3a}{2} + 2 \sin \frac{5a}{2} \cos \frac{a}{2} = 0,$$

sau

$$2 \sin \frac{5a}{2} \left(\cos \frac{3a}{2} + \cos \frac{a}{2} \right) = 4 \sin \frac{5a}{2} \cos a \cos \frac{a}{2} = 0,$$

cu soluțiile:

$$a_1 = \frac{2}{5} k\pi, \quad a_2 = k'\pi + \frac{\pi}{2}, \quad a_3 = 2\left(k''\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

2) Pentru $a = \frac{\pi}{2}$ obținem ecuația

$$2x^5 + x^3 - x + 2 = 0;$$

notăm

$$f(x) = 2x^5 + x^3 - x + 2,$$

deci

$$f'(x) = 10x^4 + 3x^2 - 1.$$

Anulăm derivata: $10x^4 + 3x^2 - 1 = 0$

$$x_1^2 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 40}}{20} = \frac{1}{5}, \quad x_2^2 = \frac{-3 - \sqrt{9 + 40}}{20} = -\frac{1}{2},$$

$$x_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x_1'' = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x_2', \; x_2'' \text{ imaginare};$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{25}\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{5} + 2 = -\frac{18}{25\sqrt{5}} + 2 > 0,$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{18}{25\sqrt{5}} + 2 > 0.$$

Formăm șirul lui Rolle

$f(-\infty)$	$f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	$f(+\infty)$
$-$	$+$	$+$	$+$

Ecuația are o singură rădăcină reală $< -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Se observă că acea rădăcină este -1.

3) Pentru ca $x = -1$ să fie admisă rădăcina dublă trebuie ca să fie rădăcină a ecuației:

$$f'(x) = 10x^4 + 4x^3\sin 4a - 3x^2\sin 3a + 2x\sin 2a - \sin a = 0,$$

deci

$$10 - 4\sin 4a - 3\sin 3a - 2\sin 2a - \sin a = 0,$$

ecuație care cere ca

$$\sin 4a = \sin 3a = \sin 2a = \sin a = 1$$

și nu există nici o valoare a lui a care să satisfacă toate aceste egalități. În adevăr pentru $\sin a = 1$, $a_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Ecuația $\sin 2a = 1$ nu admite această soluție.

10. Se dă

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{1 - ax^2}{1 + ax^2},$$

unde a este un parametru real.

1) Se cere intervalul de variație al lui a astfel încît funcția $f(x)$ să fie definită pentru $x \in R$.

2) Pentru $a = 1$ să se studieze variația și să se reprezinte grafic $f(x)$.

3) Să se calculeze

$$F(a) = \int_0^1 \operatorname{Arcsin} \frac{1 - ax^2}{1 + ax^2}\, dx.$$

4) Să se calculeze $\lim_{a \to 0+} F(a)$.

R. 1) Trebuie să avem

$$-1 \leqslant \frac{1 - ax^2}{1 + ax^2} \leqslant +1,$$

ceea ce nu poate avea loc decît pentru $a \geqslant 0$, deci $f(x)$ este definită pe R pentru $a \in [0, \infty)$.

2) Avem

$$y = \operatorname{Arcsin} \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad x \in R,$$

și pentru că Arcsin este determinarea principală rezultă că mulțimea valorilor este $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Avem

$$\lim_{x \to -\infty} y = \operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to +\infty} y = -\frac{\pi}{2},$$

$$y = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad y(0) = \operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Calculăm derivata lui $y(x)$,

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(1 + x^2) - 2x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2},$$

$$y'(x) = -2 \frac{|x|}{x} \frac{1}{1 + x^2}.$$

În origine $y(x)$ nu este derivabilă deoarece:

$$y'(0+) = -2, \qquad y'(0-) = 2,$$

$$y''(x) = -\frac{4x}{(1 + x^2)^2}, \quad x < 0,$$

$$y''(x) = \frac{4x}{(1 + x^2)^2}, \quad x > 0,$$

deci pe $R - \{0\}$, $y''(x) > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variație

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'	$+$	$+$	$+$	2	-2	$-$	$-$	$-$	$-$
y''	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
y	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

Graficul are asimptota orizontală $y = -\frac{\pi}{2}$.

În origine graficul (fig. 56) are un punct unghiular.

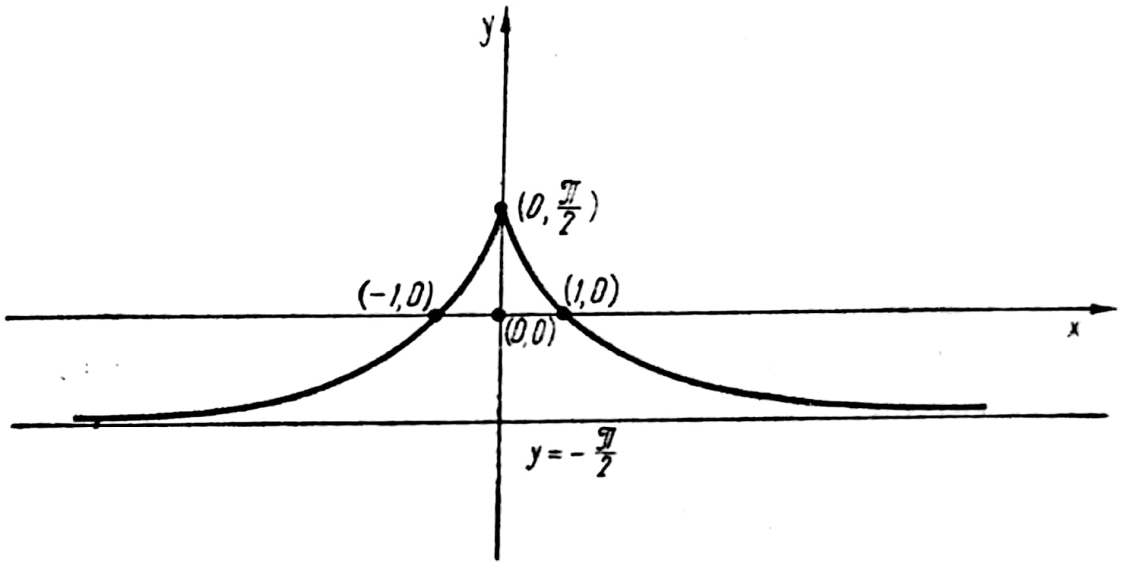


Fig. 56

3) Integrăm prin părți

$$u = \operatorname{Arcsin}\frac{1-ax^2}{1+ax^2}, \qquad du = -\frac{2\sqrt{a}}{1+ax^2}\,dx, \qquad x > 0,$$

$$dv = dx, \qquad v = x,$$

$$F(a) = \int_0^1 \operatorname{Arcsin}\frac{1-ax^2}{1+ax^2}\,dx = x\operatorname{Arcsin}\frac{1-ax^2}{1+ax^2}\Big|_0^1 + 2\sqrt{a}\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+ax^2},$$

sau

$$F(a) = \left[x\operatorname{Arcsin}\frac{1-ax^2}{1+ax^2} + \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(1+ax^2)\right]_0^1,$$

deci

$$F(a) = \operatorname{Arcsin}\frac{1-a}{1+a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(1+a).$$

4) Avem

$$\lim_{a\to 0+} F(a) = \lim_{a\to 0+} \operatorname{Arcsin}\frac{1-a}{1+a} + \lim_{a\to 0+} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(1+a),$$

însă

$$\lim_{a\to 0+} \operatorname{Arcsin}\frac{1-a}{1+a} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{a\to 0+} \frac{\ln(1+a)}{\sqrt{a}} = \lim_{a\to 0+} \frac{\frac{1}{1+a}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a}}} = 0.$$

Am obținut astfel

$$\lim_{a\to 0+} F(a) = \frac{\pi}{2}.$$

Pentru calculul ultimei limite am folosit regula lui l'Hospital.

11. Se dă funcția

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 - 12x + 4}, \qquad x \in R,$$

și se cere:

1) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;
2) să se determine punctele în care $f(x)$ nu este derivabilă;
3) să se calculeze:

$$\int_0^1 f^3(x)\, e^{3x}\, dx.$$

R. 1) Mulțimea de definiție este R. Intersecțiile cu axa Ox sînt date de rădăcinile ecuației $f(x) = 0$,

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + 4 = 0,$$

sau

$$(x+2)(2x^2 - 7x + 2) = 0,$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{1}{4}(7 + \sqrt{33}) \simeq 3{,}2, \qquad x_3 = \frac{1}{4}(7 - \sqrt{33}) \simeq 0{,}4.$$

Intersecția cu axa Oy se obține făcînd $x = 0$, $y_1 = \sqrt[3]{4} \simeq 1{,}6$.
Graficul nu are asimptote verticală sau orizontală.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 - 12x + 4}}{x} = \sqrt[3]{2} \simeq 1{,}26;$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - \sqrt[3]{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 - 12x + 4} - \sqrt[3]{2}x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2 - 12x + 4}{\sqrt[3]{(2x^3 - 3x^2 - 12x + 4)^2} + \sqrt[3]{2}\, x \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 - 12x + 4} + \sqrt[3]{4}x^2} = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$n = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}} \text{ și } y = \sqrt[3]{2}x - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \text{ este asimptota oblică.}$$

Calculăm derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{6x^2 - 6x - 12}{\sqrt[3]{(2x^3 - 3x^2 - 12x + 4)^2}},$$

$$f'(x) = 0, \qquad x_1' = -1, \qquad x_2' = 2.$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$		-2		-1		0		$\frac{1}{4}(7-\sqrt{33})$		2		$\frac{1}{4}(7+\sqrt{33})$		$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\sqrt[3]{11}$	↘	$\sqrt[3]{4}$	↘	0	↘	$-\sqrt[3]{28}$	↗	0	↗	$+\infty$
			A		B max		C		D		E min		F		

Graficul este dat în figura 57.

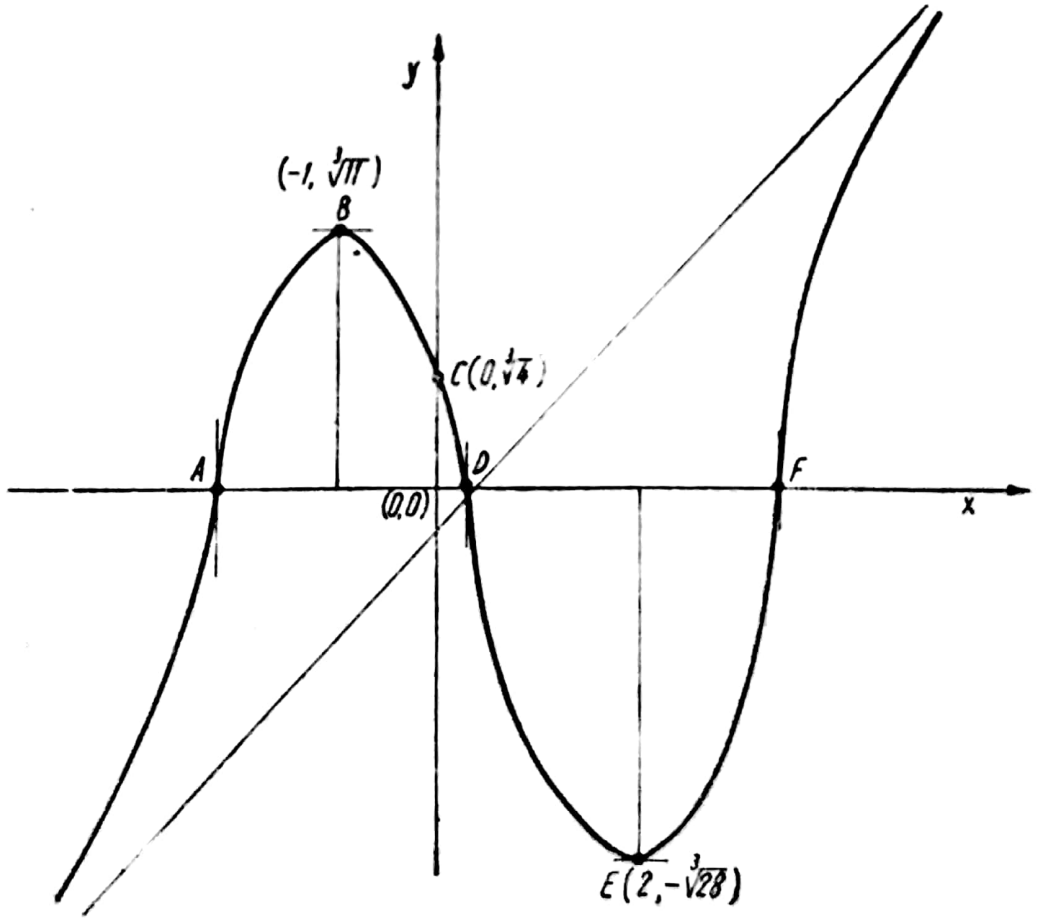


Fig. 57

2) $f'(x)$ nu este derivabilă în punctele în care $f(x) = 0$; în punctele A și F, deoarece în vecinătatea acestor puncte f este crescătoare, rezultă că derivata are valoarea $+\infty$, în punctul D are valoarea $-\infty$.

3) Avem $f^2(x)e^{2x} = (2x^3 - 3x^2 - 12x + 4)e^{3x}$,

deci

$$\int_0^1 f^2(x)e^{3x}dx = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2 - 12x + 4)e^{3x}dx =$$

$$= 2\int_0^1 x^3e^{3x}dx - 3\int_0^1 x^2e^{3x}dx - 12\int_0^1 xe^{3x}dx + 4\int_0^1 e^{3x}dx;$$

$$I_1 = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3};$$

$$I_2 = \int_0^1 xe^{3x}dx = \left[\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right]_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9};$$

$$I_3 = \int_0^1 x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x}\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 xe^{3x}dx = \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{3}I_2 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27};$$

$$I_4 = \int_0^1 x^3e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^3e^{3x}\Big|_0^1 - \int_0^1 x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^3 - I_3 = \frac{1}{3}e^3 - \left(\frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}\right) =$$

$$= \frac{4}{27}e^3 + \frac{2}{27};$$

$$I = 4I_1 - 12I_2 - 3I_3 + 2I_4 = 4\left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\right) - 12\left(\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}\right) - 3\left(\frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}\right) +$$

$$+ 2\left(\frac{4}{27}e^3 + \frac{2}{27}\right) = -\frac{43}{27}e^3 - \frac{62}{27} = -\frac{1}{27}(43e^3 + 62).$$

12. Fie ABC un triunghi în care se dau laturile $BC = a$, $AC = b$. Fie AA', BB' înălțimile duse din A și B, H punctul lor de intersecție și D punctul în care dreapta BB' întîlnește paralela dusă în C la AA'.

Se cere:

1. să se arate că patrulaterul $A'HB'C$ este inscriptibil;

2. să se determine o valoare a unghiului $\hat{C}$ ascuțit, astfel încît aria $\Delta A'BH$ = aria $A'HDC$ (discuție după a și b);

3. presupunînd $\Delta\, ABC$ isoscel $(a = b)$, să se afle pentru ce valoare a lui $\hat{C}$ (unghi ascuțit) este maxim raportul:

$$\frac{\text{aria } \Delta\,(ABC)}{\text{aria } \Delta\,(BHA')}.$$

1970 — Institutul Politehnic, București.

R. 1) **Conform figurii 58 avem** $BB' \perp B'C$, $AA' \perp A'C$ **deci în patrulaterul** $A'HB'C$, $\sphericalangle A' = \sphericalangle B' = 90°$ **sau** $\sphericalangle A' + \sphericalangle B' = 180°$; **patrulaterul este inscriptibil deoarece două unghiuri opuse sînt suplementare.**

2) Notăm $\sphericalangle C = \alpha$,

$$\text{aria } \Delta\, A'BH = \frac{1}{2} BA' \cdot A'H,$$

$$\text{aria } A'HDC = \frac{1}{2} A'C(A'H + CD),$$

$$CD = BC \operatorname{ctg} \alpha = a \operatorname{ctg} \alpha,\quad A'C = CA \cos \alpha = b \cos \alpha,$$

$$BA' = BC - A'C = a - b \cos \alpha,\quad A'H = BA' = BA' \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$A'H = (a - b \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\text{aria } \Delta\, A'BH = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha\, (a - b \cos \alpha)^2,$$

$$\text{aria } A'HDC = \frac{1}{2} b \cos \alpha (2a - b \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Conform enunțului trebuie să avem:

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha (a - b \cos \alpha)^2 =$$

$$= \frac{b}{2} \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha (2a - b \cos \alpha);$$

pentru $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, relația se reduce la

$$(a - b \cos \alpha)^2 = b \cos \alpha (2a - b \cos \alpha),$$

sau

$$(\delta) \qquad 2b^2 \cos^2 \alpha - 4ab \cos \alpha + a^2 = 0,$$

cu soluțiile

$$\cos \alpha_1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2},\quad \cos \alpha_2 = \frac{a}{b} \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

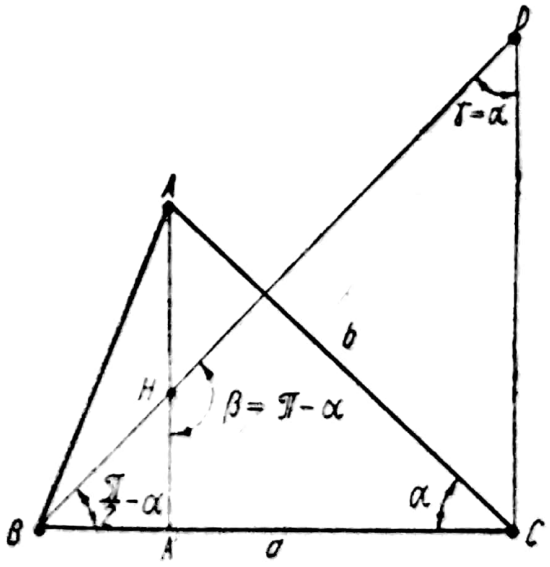


Fig. 58

Discuție: să punem $\lambda = \frac{a}{b} > 0$. Trebuie să avem:

$$0 < \frac{2+\sqrt{2}}{2}\lambda < 1, \text{ deci } \lambda < \frac{2}{2+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2},$$

$$0 < \frac{2-\sqrt{2}}{2}\lambda < 1, \text{ deci } \lambda < \frac{2}{2-\sqrt{2}} = 2+\sqrt{2},$$

prin urmare

$\frac{a}{b} = \lambda \in (0, 2-\sqrt{2})$ ecuația (δ) admite soluțiile

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$$

și

$$\alpha_3 = \arccos\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\lambda\right);$$

$\frac{a}{b} = \lambda = 2-\sqrt{2}$, ecuația (δ) admite soluția

$$\alpha' = \arccos(3-2\sqrt{2}),$$

$\frac{a}{b} = \lambda \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, ecuația (δ) admite soluție:

$$\alpha_1'' = \arccos\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\lambda\right).$$

$\frac{a}{b} = \lambda \in (2+\sqrt{2}, +\infty)$ ecuația (δ) nu admite nici o soluție.

3) aria $\Delta ABC = \frac{ab}{2}\sin\alpha = \frac{a^2}{2}\sin\alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\text{aria } \Delta BHA' = \frac{a^2}{2}(1-\cos\alpha)^2\operatorname{ctg}\alpha,$$

în ipoteza că $a = b$.

Avem de studiat funcția:

$$f(\alpha) = \frac{\text{aria } \Delta ABC}{\text{aria } \Delta BHA'} = \frac{\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2\operatorname{ctg}\alpha},$$

sau

$$f(\alpha) = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1-\cos\alpha)^2};$$

observăm că f este definită pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și derivabilă. Avem și

$$f(\alpha) = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1-\cos\alpha)^2}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha(1-\cos\alpha)},$$

$$f'(\alpha) = \frac{-\sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\alpha) - (1+\cos\alpha)(-\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha(1-\cos\alpha)^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$f'(\alpha) = \frac{-\sin\alpha\,(\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1)}{\cos^2\alpha\,(1-\cos\alpha)^2};$$

$$f'(\alpha) = 0, \qquad \sin\alpha = 0, \qquad \text{nu are soluții în } \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0$, $\cos\alpha_1 = -1 + \sqrt{2}$, $\cos\alpha_2 = -1 - \sqrt{2}$, deci singura soluție este $\alpha_1 = \arccos(\sqrt{2} - 1)$.

Avem $f'(\alpha_1 + \varepsilon) < 0$, $\quad f'(\alpha_1 - \varepsilon) > 0$, $\quad \varepsilon > 0$,

de unde rezultă că α_1 este un punct de maximum.

13. Se dă funcția

$$f(x) = xe^{x+\frac{1}{x}}, \quad x \in R - \{0\}$$

și se cere:

1) să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția;

2) să se calculeze derivata la dreapta și derivata la stînga în punctul $x = 0$;

3) să se calculeze:

$$\int_1^2 \ln x \; f(x)\, e^{-x-\frac{1}{x}}\, dx.$$

R. 1) Funcția fiind definită pe $R - \{0\}$, să calculăm $f(0+)$ și $f(0-)$. Avem:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} xe^{x+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} e^x \lim_{x\to 0+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

deoarece

$$\lim_{x\to 0+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} e^x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} xe^{x+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0-} e^x \lim_{x\to 0-} xe^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Calculăm derivata funcției $f(x)$:

$$f'(x) = e^{x+\frac{1}{x}}\left(1 + x - \frac{x}{x^2}\right) = \frac{1}{x}(x^2 + x - 1)e^{x+\frac{1}{x}},$$

$$f'(x) = 0, \qquad x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2};$$

mulțimea de derivabilitate este $R - \{0\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variație

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -$	0	$+$	$+$	$-\ -\ -$	0	$+$	$+\ +\ +\ +$	
$f(x)$	$0\ \searrow$		$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-\sqrt{5}}$ A	$\nearrow$	0	$+\infty\ \searrow$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{\sqrt{5}}$ B	$\nearrow$	$+\infty$

Avem: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} \lim\limits_{x\to\infty} xe^x = 0,$

deoarece

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} -e^x = 0.$$

Graficul este dat în figura 59.

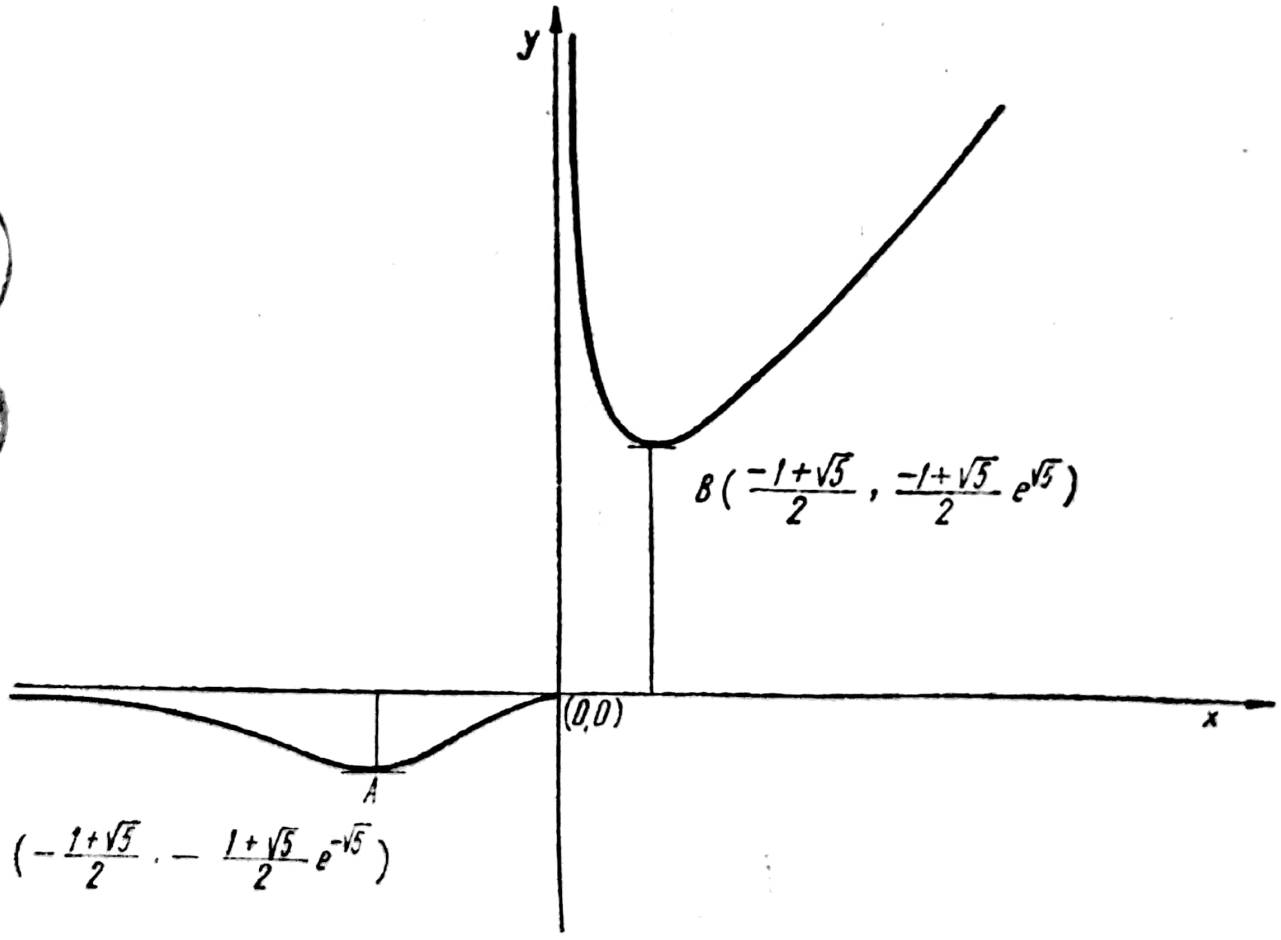


Fig. 59

Scanned with OKEN Scanner

2) În origine graficul admite semitangentă la stînga axa Ox deoarece $f'(0-) = 0$. Avem și $f'(0+) = +\infty$. Aceste valori sînt confirmate și de grafic.

3) Avem $f(x)e^{-x-\frac{1}{x}} \ln x = x \ln x, \quad x > 0,$

deci

$$\int_1^2 e^{-x-\frac{1}{x}} f(x) \ln x \, dx = \int_1^2 x \ln x \, dx;$$

integrăm prin părți: $x\,dx = du$, $\ln x = v$, $u = \frac{1}{2}x^2$, $dv = \frac{1}{x}dx$; obținem:

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

14. Se dă

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 - 9x^2 + 8}}{x}$$

și se cere:

1) mulțimile de definiție, de continuitate și de derivabilitate;
2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;
3) să se calculeze:

$$\int_1^2 f^2(x) \ln x \, dx.$$

R. 1) Funcția nu este definită în punctul $x = 0$. Funcția nu este definită nici în punctele pentru care $x^4 - 9x^2 + 8 < 0$. Avem:

$$x^4 - 9x^2 + 8 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = +1, \quad x_3 = -2\sqrt{2}, \quad x_4 = +2\sqrt{2},$$

x	$-\infty$			$-2\sqrt{2}$			-1		1			$2\sqrt{2}$			$+\infty$
$x^4 - 9x^2 + 8$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

prin urmare mulțimea de definiție este:

$$D: (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [-1, 0) \cup (0, +1] \cup [2\sqrt{2}, +\infty).$$

Mulțimea de definiție este și mulțimea de continuitate: în punctele $-2\sqrt{2}$ și 1 f este continuă la stînga iar în punctele -1 și $2\sqrt{2}$ este continuă la dreapta.

Scanned with OKEN Scanner

Calculăm derivata lui $f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\,\frac{1}{2}\,\frac{4x^3 - 18x}{\sqrt{x^4 - 9x^2 + 8}} - \frac{1}{x^2}\sqrt{x^4 - 9x^2 + 8},$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\,\frac{x^4 - 8}{\sqrt{x^4 - 9x^2 + 8}}.$$

Mulțimea de derivabilitate este:

$$D' : (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (-1, 0) \cup (0, +1) \cup (2\sqrt{2}, +\infty).$$

În punctele $-2\sqrt{2}$ și $+1$, are derivată la stînga iar în punctele -1 și $2\sqrt{2}$ are derivată la dreapta.

În adevăr

$$\lim_{x \to -2\sqrt{2}-0} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -1+0} f'(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 1-0} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 2\sqrt{2}+0} f'(x) = +\infty.$$

În aceste puncte însă $f(x)$ nu este derivabilă.

2) Pentru a trasa graficul funcției f observăm că $x = 0$ este o asimptotă verticală. Determinăm, dacă există, asimptota oblică. Avem:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad m' = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

deci există o singură direcție asimptotică.

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\sqrt{x^4 - 9x^2 + 8}}{x} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 9x^2 + 8 - x^4}{x(\sqrt{x^4 - 9x^2 + 8} + x^2)} = 0.$$

Graficul admite asimptota oblică $y = x$.

Punctele în care graficul întîlnește axa Ox sînt:

$$x_1 = -2\sqrt{2},\ x_2 = -1, \quad x_3 = +1 \quad \text{și} \quad x_4 = 2\sqrt{2}.$$

$$f'(x) = 0, \quad x_1' = \sqrt[4]{8},\ x = -\sqrt[4]{8}.$$

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		-1		0		1		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$		$+\infty$

Graficul este dat în figura 60.

Scanned with OKEN Scanner

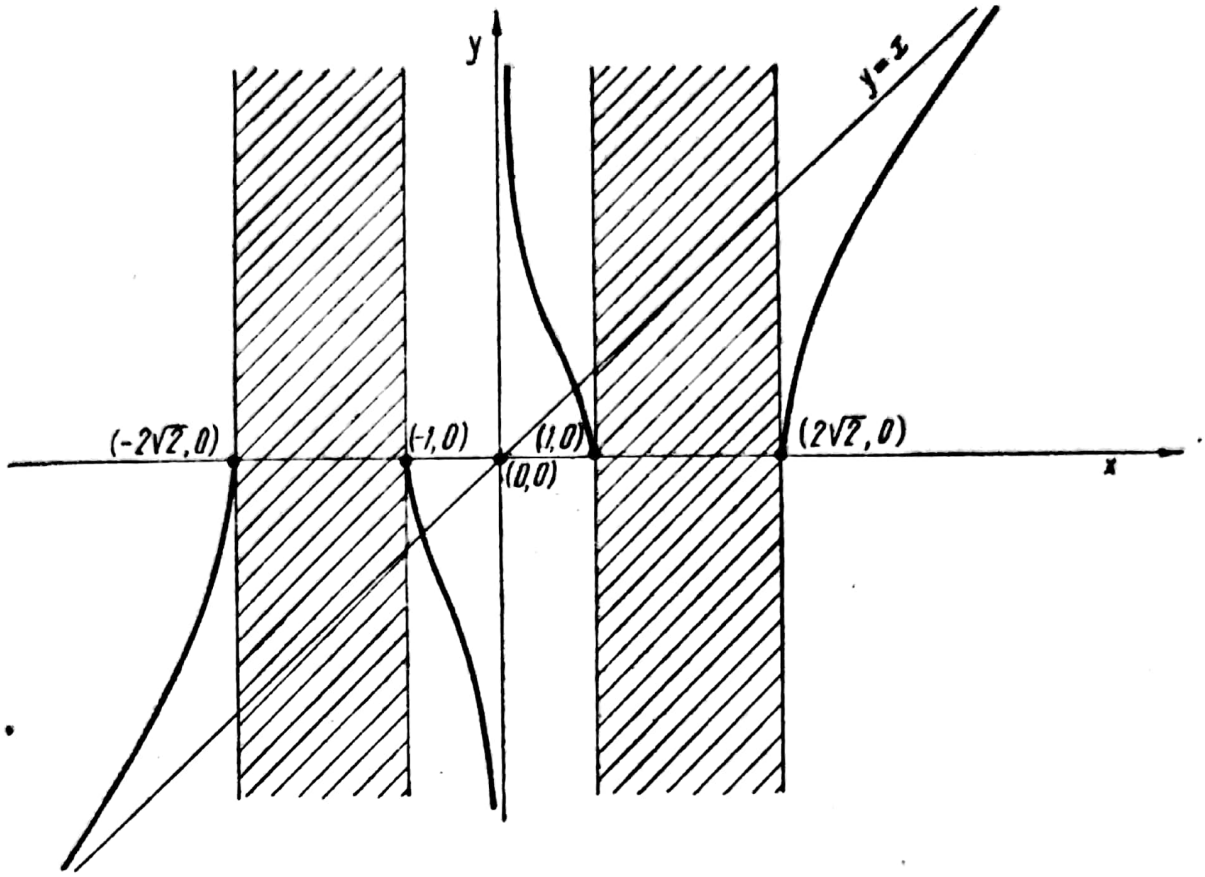


Fig. 60

3) $f^2(x)\ln x = \dfrac{x^4 - 9x^2 + 8}{x^3}\ln x,$

deci avem de calculat integrala definită

$$\int_1^2 \frac{x^4 - 9x^2 + 8}{x^3}\ln x\,dx = \int_1^2 x^2\ln x\,dx - 9\int_1^2 \ln x\,dx + 8\int_1^2 \frac{\ln x\,dx}{x^3}.$$

Le integrăm prin părţi:

$$I_1 = \int_1^2 x^2\ln x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9},$$

$$x^2dx = du,\ v = \ln x,\ u = \frac{1}{3}x^3,\ dv = \frac{dx}{x}.$$

$$I_2 = \int_1^2 \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

$$du = dx,\ v = \ln x,\ u = x,\ dv = \frac{dx}{x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$I_2 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x - \left|\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2},\right.$$

$$\frac{1}{x^2}\,dx = du, \quad v = \ln x, \quad u = -\frac{1}{x}, \quad dv = \frac{1}{x}\,dx.$$

$$I = I_1 - 9I_2 + 8I_3 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9} - 9(2\ln 2 - 1) + 8\left(-\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{58}{3}\ln 2 + \frac{110}{9} = \frac{2}{3}\left(\frac{55}{3} - 29\ln 2\right).$$

15. Se dă funcţia

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{2x}{1+x^2}, \quad x \in R$$

şi se cere:

1) să se găsească punctele în care nu are derivată; în aceste puncte să se calculeze derivata la dreapta şi derivata la stînga;

2) să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic;

3) să se determine marginile superioară şi inferioară ale pantei tangentei la grafic;

4) să se calculeze:

$$\int_0^2 x \operatorname{Arcsin}\frac{2x}{1+x^2}\,dx.$$

R. 1) Mulţimea de definiţie este R deoarece $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 1$; prin Arcsin înţelegem determinarea principală deci mulţimea valorilor este $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Calculăm derivata lui $f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2},$$

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{|1-x^2|} \cdot \frac{1}{1+x^2},$$

deci:

$$f'(x) = \begin{cases} +\dfrac{2}{1+x^2}, & x \in (-1, +1), \\ -\dfrac{2}{1+x^2}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

prin urmare funcția nu are derivată în punctele -1 și $+1$. În aceste puncte derivatele la dreapta și la stînga sînt:

$$f'(-1-0) = -1, \qquad f'(-1+0) = +1,$$
$$f'(1-0) = +1, \qquad f'(1+0) = -1,$$

punctele -1 și $+1$ sînt deci puncte unghiulare.

2) $f(x) = 0, \qquad x_1 = 0,$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

$$f''(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^3}, \quad x \in (-1, +1),$$

$$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^3}, \qquad x \in R - [-1, +1].$$

Tabloul de variație:

x	$-\infty$					-1				0				$+1$					$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘				$-\frac{\pi}{2}$	↗			0	↗			$\frac{\pi}{2}$	↘				0

Graficul este dat în figura 61.

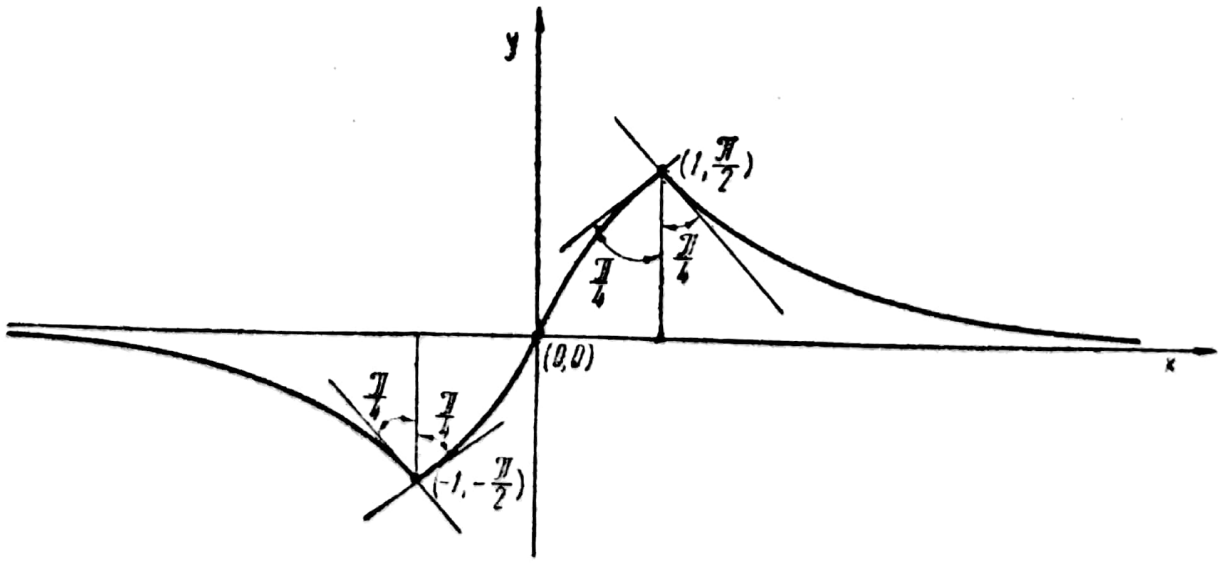


Fig. 61

3) Panta tangentei la grafic este dată de valoarea lui $f'(x)$ în punctul de tangență, deci sîntem conduși la determinarea marginilor superioară și inferioară ale lui $f'(x)$. Pe $R - [-1, +1]$ avem

$$\sup f'(x) = \sup \frac{-2}{1+x^2} = 0;$$

$$\inf f'(x) = \inf \frac{-2}{+x^2} = -1;$$

pe $(-1, +1)$ avem

$$\sup f'(x) = \sup \frac{2}{1+x^2} = 2,$$

$$\inf f'(x) = \inf \frac{2}{1+x^2} = 1.$$

În rezumat $\sup f'(x) = 2$, $\inf f'(x) = -1$.

4) Integrăm prin părți

$$I = \int_0^2 x \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2}\,dx + \int_1^2 x \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2}\,dx,$$

$$I_1 = \int_0^1 x \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx,$$

$$I_1 = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} - x + \operatorname{Arctg} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1;$$

$$I_2 = \int_1^2 x \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx,$$

$$I_2 = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} + x - \operatorname{Arctg} x\right]_1^2 = 2 \operatorname{Arcsin} \frac{4}{5} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + 1 - \operatorname{Arctg} 2 + \frac{\pi}{4} =$$

$$= 2 \operatorname{Arcsin} \frac{4}{5} - \operatorname{Arctg} 2 + 1;$$

deci

$$I = \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{Arcsin} \frac{4}{5} - \operatorname{Arctg} 2.$$

16. Se dă

$$f(x) = \frac{1}{x+2} e^{|x|}$$

și se cere:

Scanned with OKEN Scanner

1) să se găsească punctele în care f nu este derivabilă; în acele puncte să se calculeze derivata la dreapta și derivata la stînga;

2) să se discute după parametrul λ numărul rădăcinilor reale ale ecuației: $f(x) = \lambda$;

3) să se calculeze

$$\int_{-1}^{+1} (x + 2)\, x^4 f(x)\, dx.$$

1970. Institutul Politehnic, București.

R. Ținînd seama de definiția lui $|x|$ avem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} e^{-x}, & x \in (-\infty, 0) - \{-2\}, \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0, \\ \dfrac{1}{x+2} e^{x}, & x \in (0, +\infty), \end{cases}$$

rezultă că mulțimea de definiție este $R - \{-2\}$.
Mulțimea de continuitate este tot $R - \{2-\}$ deoarece în origine funcția f este continuă. În adevăr

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = \frac{1}{2}.$$

În punctul $x = -2$ nu se pune problema continuității deoarece în acest punct funcția nu este definită.

Funcția $f(x) = \dfrac{1}{x+2} e^{-x}$, $x \in (-\infty, 0) - \{-2\}$ este derivabilă pe mulțimea de definiție fiind produsul a două funcții derivabile. Funcția $f(x) = \dfrac{1}{x+2} e^{x}$, $x \in (0, +\infty)$ este derivabilă pe mulțimea de definiție din același motiv. Rămîne să mai cercetăm dacă $f(x)$ este derivabilă în punctul $x = 0$, punct în care am arătat că este continuă. Avem

$$f'(x) = \left[\frac{-1}{(x+2)^2} - \frac{1}{x+2}\right] e^{-x} = \frac{-x-3}{(x+2)^2} e^{-x}, \qquad x \in R - \{-2\},$$

$$f'(x) = \left[\frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2}\right] e^{x} = \frac{x+1}{(x+2)^2} e^{x}, \qquad x \in R_+,$$

deci

$$f'(-0) = -\frac{3}{4}, \quad f'(+0) = \frac{1}{4}.$$

Cele două derivate laterale în punctul zero, există însă sînt diferite, urmează că f nu este derivabilă în punctul $x = 0$; mulțimea de derivabilitate este $R - \{-2, 0\}$.

2) Vom discuta ecuația $f(x) = \lambda$ grafic. În acest scop vom trasa graficul funcției $y = f(x)$

Avem

$$\lim_{x \to -2+0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -2+0} f(x) = -\infty,$$

graficul admite asimptota verticală $x = -2$.

Derivata pe $(-\infty, 0) - \{-2\}$ se anulează pentru $x = -3$ iar derivata pe $(0, +\infty)$ se anulează pentru $x = -1$ care nu aparține intervalului de definiție.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+ + + +$	0	$- - -$		$- - - - -$		$+ + + + +$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e^3$ (max)	$\searrow$	$-\infty$ $\quad +\infty$	$\searrow$	$1/2$ (min)	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul este dat în figura 62. În trasarea graficului se ține seama că $f'(-0) = -\frac{3}{4}$, $f'(0+) = \frac{1}{4}$.

Se observă că semitangenta la grafic în punctul $\left(0+, \frac{1}{2}\right)$ trece prin punctul $(-2, 0)$. În adevăr tangenta are ecuația $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x$ sau $4y - 2 = x$ și este verificată în acest punct. Dacă intersectăm graficul cu dreapta variabilă $y = \lambda$ obținem următoarele rezultate:

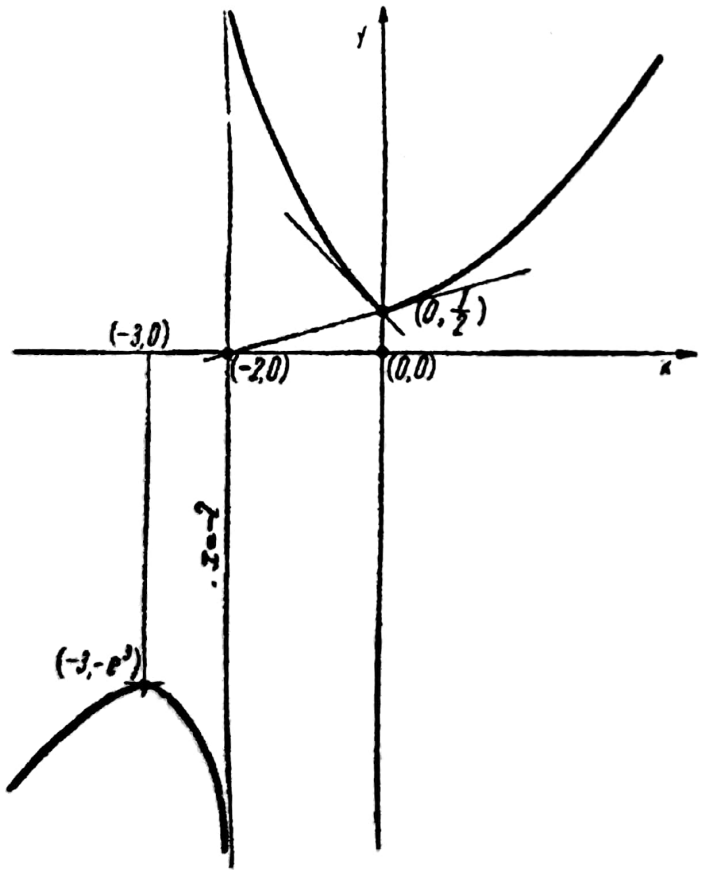


Fig. 62

a) $\lambda < -e^{+3}$, două rădăcini reale < -2;

b) $\lambda = -e^{+3}$, o rădăcină reală dublă $x = -3$;

c) $-e^{+3} < \lambda < \frac{1}{2}$, nici o rădăcină reală;

d) $\lambda > \frac{1}{2}$, două rădăcini reale, $x_1 \in (-2\ 0)$, $x_2 > 0$; cînd $\lambda \to \frac{1}{2} + 0$ cele două rădăcini au ca limită valoarea zero.

3) Pentru calculul integralei definite ținem seama că

$$f(x)(x+2)x^4 = x^4 e^{-x}, \text{ pentru } x \in [-1, 0],$$

și

$$f(x)(x+2)x^4 = x^4 e^{x}, \text{ pentru } x \in [0, +1],$$

prin urmare

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,(x+2)x^4\,dx = \int_{-1}^{0} x^4 e^{-x}\,dx + \int_{0}^{1} x^4 e^{x}\,dx = 2\int_{0}^{1} x^4 e^{x}\,dx;$$

folosim metoda integrării prin părți

$$I = 2\int_0^1 x^4 e^x\,dx = 2\left[x^4 e^x\Big|_0^1 - 4\int_0^1 x^3 e^x\,dx\right],$$

$$I = 2e - 8\int_0^1 x^3 e^x\,dx = 2e - 8\left[x^3 e^x\Big|_0^1 - 3\int_0^1 x^2 e^x\,dx\right],$$

$$I = -6e + 24\int_0^1 x^2 e^x\,dx = -6e + 24\left[x^2 e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xe^x\,dx\right],$$

$$I = 18e - 48\left[xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1\right] = 18e - 48 = 6(3e-8).$$

17. Se consideră funcția $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \ln x & \text{pentru } x > 0, \\ 0 & \text{pentru } x = 0, \end{cases}$ unde α este un număr real mai mare ca 1. Se notează cu C curba care reprezintă graficul funcției $f(x)$. Se cere:

1) să se construiască curba C și să se precizeze cîteva elemente ale curbei (puncte, tangente) care nu depind de valoarea lui α;

2) să se calculeze aria domeniului cuprins între axa Ox și aceea parte a curbei C care se află sub axa Ox;

să se determine $k > 1$ astfel ca această arie să fie egală cu aria cuprinsă între Ox, curba C și dreptele $x = 1$ și $x = k$,

3) din calculul integralei $\int_1^k f(x)dx$ să se deducă inegalitatea

$$\ln k^p > 1 - \frac{1}{k^p} \quad \text{pentru} \quad k > 1,\ p > 1;$$

4) să se verifice că punctul de extrem al curbei C, cînd α parcurge intervalul $(1, \infty)$, descrie o parte a graficului funcției $g(x) = \frac{1}{e}\ln x$; să se precizeze această parte.

1969 — Institutul Politehnic, București.

R. 1) Mulțimea de definiție este semiaxa $[0, +\infty)$. Funcția este continuă la dreapta în punctul $x = 0$ deoarece

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-1}{\alpha} x^\alpha = 0,$$

$$f(x) = 0, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 1.$$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \ln x + x^\alpha \frac{1}{x} = x^{\alpha-1}(\alpha \ln x + 1), \quad x > 0,$$

$$f'(x) = 0, \qquad \alpha \ln x + 1 = 0, \qquad x = e^{-\frac{1}{\alpha}} > 0.$$

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \alpha x^{\alpha-1} \ln x + \lim_{x\to 0+} x^{\alpha-1} = 0,$$

deoarece $\alpha > 1$.

Semitangenta în origine este semiaxa Ox.

$$f''(x) = x^{\alpha-2}[\alpha(\alpha-1)\ln x + 2\alpha - 1] = 0, \qquad x = e^{\frac{1-2\alpha}{\alpha(\alpha-1)}}.$$

Tabloul de variație

x	0		$e^{-\frac{1}{\alpha}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +$			
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\alpha e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul este dat în figura 63.

Să observăm că $f''(x) = 0$ pentru $x = e^{\frac{1-2\alpha}{\alpha(\alpha-1)}}$ deci $x \in (0, 1)$. Graficul are un singur punct de inflexiune pentru orice $\alpha > 1$. Observăm că semitangenta în origine deasemenea este independentă de α. Avem și $f'(1) = 1$ deci tangenta la grafic în punctul de abscisă $x = 1$, este paralelă cu prima bisectoare a axelor.

Punctele $(0, 0)$ și $(1, 0)$ sînt comune tuturor graficelor.

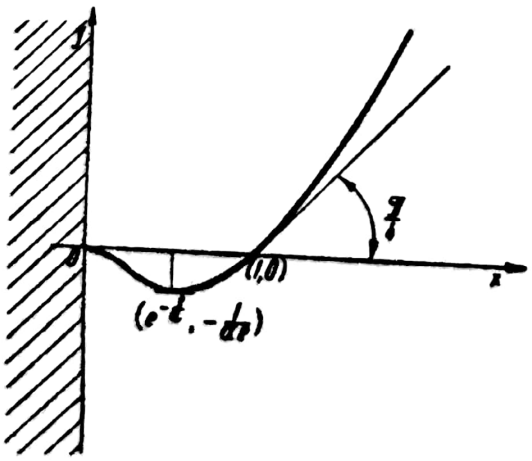


Fig. 63

2) Aria $\mathcal{A}$ a domeniului plan mărginit de grafic pentru $x \in [0, 1]$ și axa Ox este dată de

$$\mathcal{A} = -\int_0^1 x^\alpha \ln x \, dx =$$

$$= \frac{-1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \ln x \Big|_0^1 + \frac{1}{(\alpha+1)^2} x^{\alpha+1} \Big|_0^1;$$

am integrat prin părți punind $x^\alpha\,dx = du$, $u = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ și $v = \ln x$, $dv = \frac{1}{x}dx$. Obținem

$$\mathcal{A} = \frac{1}{(\alpha+1)^2}.$$

Avem pentru $k > 1$,

$$\mathcal{A}' = \int_1^k x^\alpha \ln x\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln x\Big|_1^k - \frac{1}{(\alpha+1)^2}x^{\alpha+1}\Big|_1^k,$$

sau

$$\mathcal{A}' = \frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln k - \frac{1}{(\alpha+1)^2}(k^{\alpha+1}-1).$$

Din egalitatea $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$

$$\frac{1}{(\alpha+1)^2} = \frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln k - \frac{k^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + \frac{1}{(\alpha+1)^2},$$

rezultă

$$\ln k = \frac{1}{\alpha+1} \quad \text{sau} \quad k = e^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

3) Pentru $x \in (1, k)$, $x^\alpha \ln x > 0$ deci $\mathcal{A}' > 0$, sau

$$\frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln k - \frac{1}{(\alpha+1)^2}(k^{\alpha+1}-1) > 0,$$

de unde

$$(\alpha+1)k^{\alpha+1}\ln k - k^{\alpha+1} + 1 > 0,$$

sau

$$k^{\alpha+1}\ln k^{\alpha+1} > k^{\alpha+1} - 1,$$

deci

$$\ln k^{\alpha+1} > 1 - \frac{1}{k^{\alpha+1}}, \quad k > 1, \quad \alpha > 1;$$

dacă punem $\alpha + 1 = p$ rezultă imediat inegalitatea din enunț

$$\ln k^p > 1 - \frac{1}{k^p}.$$

4) Punctul de extremum are coordonatele

$$(\gamma) \qquad x = e^{-\frac{1}{\alpha}}, \qquad y = \frac{-1}{\alpha e};$$

Scanned with OKEN Scanner

cînd α parcurge intervalul $(1, +\infty)$, x parcurge intervalul $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ și y intervalul $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$. Să eliminăm pe α între cele două ecuații (γ). Avem

$$-\frac{1}{\alpha} = \ln x, \qquad -\frac{1}{\alpha} = ye,$$

deci

$$y = \frac{1}{e} \ln x, \qquad x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right),$$

este partea graficului funcției $g(x) = \frac{1}{e} \ln x$, $x \in (0, \infty)$ descris de punctul de minim.

18. Se dă funcția

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 1}, \qquad x \in R;$$

se cere:

1) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;

2) să se calculeze aria domeniului plan mărginit de arcul

$$y = f(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant +1,$$

axa Ox și dreptele $x = -1$, $x = +1$;

3) folosind teorema lui Rolle să se arate că în intervalul $(-1, +2)$, derivata a doua $f''(x)$, se anulează cel puțin odată.

1970 — Institutul Politehnic, București.

R. 1) Deoarece numitorul lui $f(x)$ nu are rădăcini reale, mulțimea de definiție este $(-\infty, +\infty)$.

$$f(x) = 0, \qquad x^2 - 5x + 4 = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad x_2 = 4.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1;$$

graficul admite asimptota orizontală $y = 1$; nu avem asimptote verticale, nu avem asimptote oblice.

$$f'(x) = \frac{(2x - 5)(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 5x + 4)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{5x^2 - 6x - 5}{(x^2 + 1)^2},$$

$$f'(x) = 0, \quad 5x^2 - 6x - 5 = 0, \quad x_1' = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{34}}{5} \simeq \frac{-2{,}8}{5}, \quad x_2' = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{34}}{5} \simeq \frac{8{,}8}{5}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru calculul lui $f(x_1')$ și $f(x_2')$, scriem pe $f(x)$ în modul următor:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 1} = \frac{5x^2 - 6x - 5 + (-19x + 25)}{5x^2 - 6x - 5 + (6x + 10)}$$

și ținem seama că x_1', x_2' sînt rădăcinile ecuației $5x^2 - 6x - 5 = 0$. Avem

$$f\left(\frac{3 \pm \sqrt{34}}{5}\right) = \frac{-19\left(\frac{3 \pm \sqrt{34}}{5}\right) + 25}{6\frac{3 \pm \sqrt{34}}{5} + 10} = \frac{8 \mp 19\sqrt{34}}{68 \pm 6\sqrt{34}},$$

sau

$$f\left(\frac{3 \pm \sqrt{34}}{5}\right) = \frac{68 \mp 110{,}2}{68 \pm 34{,}8} = \begin{cases} -0{,}41, \\ +5{,}3, \end{cases}$$

am aproximat pe $\sqrt{34}$ cu 5,8.

Tabloul de variație

x	$-\infty$		$-\frac{2{,}8}{5}$		0		1		$\frac{8{,}8}{5}$		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
(fx)	1	$\nearrow$	$5{,}3$ max	$\searrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	$-0{,}41$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

raficul este dat în figura 64.

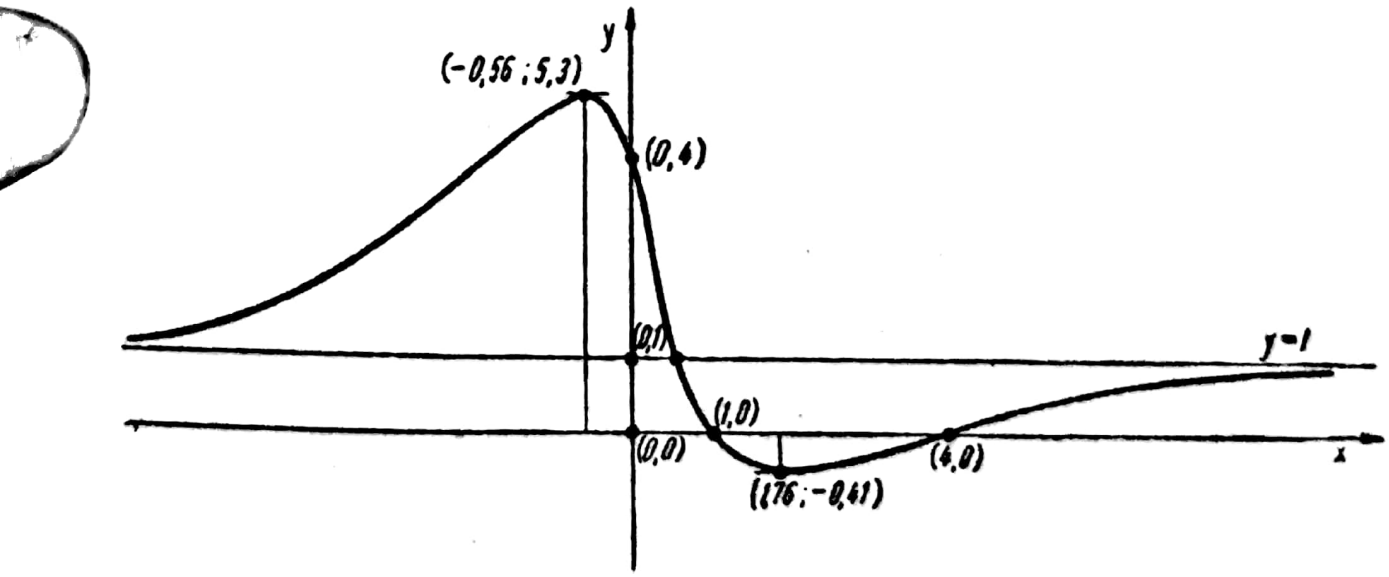


Fig. 64

2) Aria $\mathcal{A}$ a domeniului plan este dată de

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{+1} \frac{x^3 - 5x + 4}{x^3 + 1}\, dx.$$

Avem $$\frac{x^3 - 5x + 4}{x^3 + 1} = 1 + \frac{-5x + 3}{x^3 + 1},$$

deci

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{+1} \left(1 + \frac{-5x + 3}{x^3 + 1}\right) dx,$$

$$\mathcal{A} = \left[x - \frac{5}{2}\ln(x^2 + 1) + 3 \operatorname{arctg} x\right]_{-1}^{+1},$$

$$\mathcal{A} = 2 - \frac{5}{2}\ln\frac{2}{2} + 3 \operatorname{arctg} 1 - 3 \operatorname{arctg}(-1) = 2 + \frac{3}{2}\pi.$$

3) În intervalul $(-1, +2)$, derivata a întîia se anulează de două ori, şi este continuă deci derivata a doua are cel puţin o rădăcină în acest interval.

Se mai deduce acest rezultat şi din grafic deoarece în $(-1, +2)$ f este continuă, are derivata de ordinul doi continuă şi schimbă de concavitate în $(-1, +2)$ deci f'' se anulează cel puţin odată.

19. Se dă

$$f(x) = \frac{x - 2}{x + 1} e^{\frac{1}{x-2}}$$

şi se cere:

1) să se calculeze limitele la stînga şi la dreapta în punctul $x = 2$;
2) să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic;
3) din studiul variaţiei să se deducă numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei $f(x) = \lambda$, unde λ este un parametru real;
4) să se calculeze

$$\int_0^1 f(x)\, e^{-\frac{1}{x-2}} \ln(x + 1)\, dx.$$

R. 1) Observăm că mulţimea de definiţie nu este dată deci trebuie determinată. Operaţiile care determină pe f nu sînt definite pentru $x = -1$ şi $x = 2$ deci mulţimea de definiţie este: $R - \{-1, 2\}$. Pe această mulţime f este continuă şi derivabilă.

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-} \frac{1}{x + 1} \cdot \lim_{x \to 2-} (x - 2) e^{\frac{1}{x-2}} = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece

$$\lim_{x\to 2-0}(x-2)\,e^{\frac{1}{x-2}}=0,$$

pentru că

$$\lim_{x\to 2-}e^{\frac{1}{x-2}}=0 \text{ și } \lim_{x\to 2-}(x-2)=0,$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{x-2}{x+1}e^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x+1}\cdot\lim_{x\to 2+}(x-2)\,e^{\frac{1}{x-2}}=+\infty;$$

în adevăr obținem aplicînd regula lui l'Hospital

$$\lim_{x\to 2+}(x-2)\,e^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}e^{u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^{u}}{1}=+\infty.$$

2) $f(x)=0$, nu există valori pe $R-\{+2,\ -1\}$ care să o satisfacă.

$$\lim_{x\to -1+0}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to -1-0}f(x)=+\infty,$$

dreapta $x=-1$ este o asimptotă verticală.

Graficul nu admite asimptote oblice.

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x-2}}\left[\frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2}-\frac{x-2}{x+1}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}\right],$$

$$f'(x)=\frac{2x-7}{(x+1)^2(x-2)}e^{\frac{1}{x-2}},\quad x\in R-\{-1,\ 2\},$$

$$f'(x)=0,\qquad x_1=\frac{7}{2}.$$

Este necesar să calculăm derivatele laterale în punctul $x=2$; avem

$$f'(2-0)=0\qquad f'(2+0)=-\infty.$$

Avem și

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1,\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=1,$$

deci dreapta $y=1$ este o asimpotă orizontală.

Tabloul de variație

x	$-\infty$		-1		0		2		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+\ +\ +\ +\ +$		$+\ +\ +\ +$				$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$		
$f(x)$	$+1$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-2}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	0	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}}$	$\nearrow\ +1$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul este dat în figura 65.

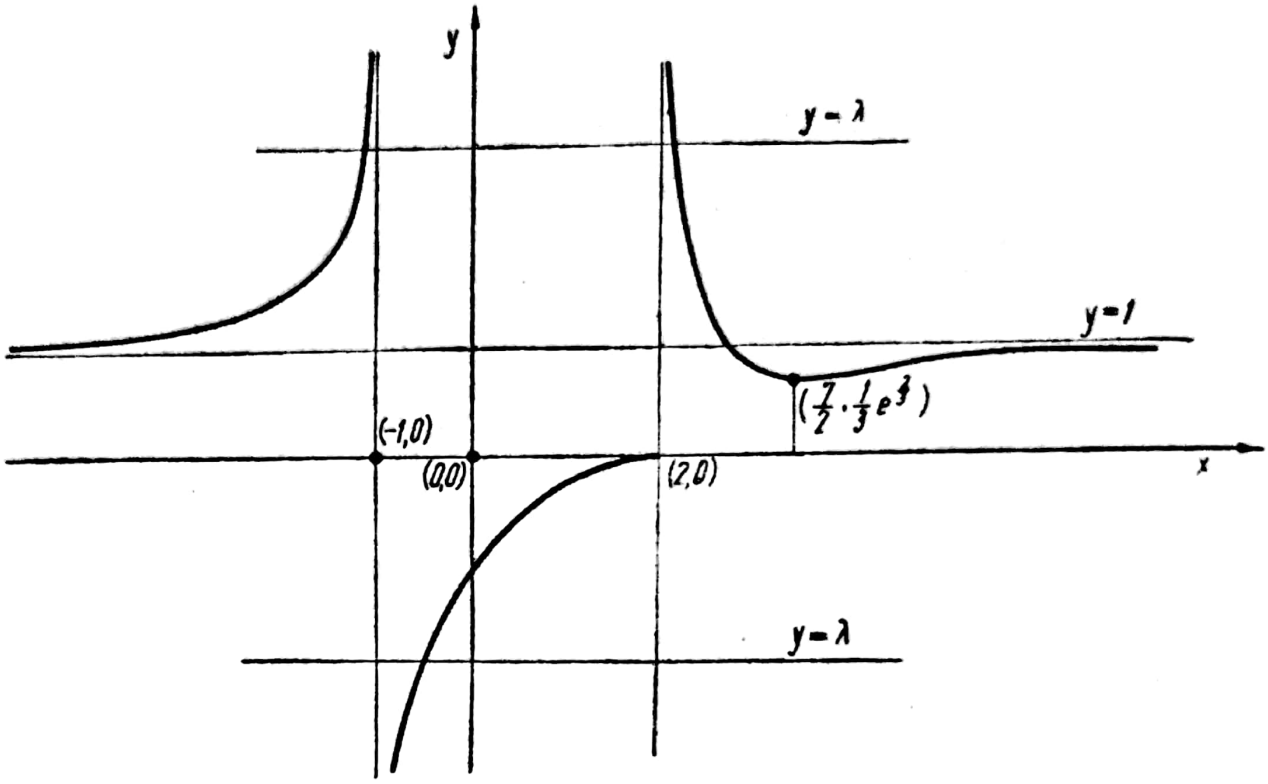


Fig. 65

3) Din grafic rezultă imediat numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x) = \lambda$. Este suficient să tăiem graficul cu o dreaptă variabilă $y = \lambda$. Avem:

a) $-\infty < \lambda < 0$, o singură rădăcină reală;

cînd $\lambda \to 0-$, rădăcina are limita $+2$;

b) $0 < \lambda < \frac{1}{3} e^{\frac{2}{3}}$, nici o rădăcină reală;

c) $\lambda = \frac{1}{3} e^{\frac{2}{3}}$, o rădăcină dublă;

d) $\frac{1}{3} e^{\frac{2}{3}} < \lambda < 1$, două rădăcini reale,

cînd $\lambda \to 1 - 0$, una din rădăcini are limita $+\infty$,

e) $\lambda > 1$ două rădăcini reale;

cînd $\lambda \to 1 + 0$, una din rădăcini are limita $-\infty$.

4) Avem

$$f(x) \cdot e^{\frac{-1}{x+1}} \ln(x+1) = \frac{x-2}{x+1} \ln(x+1),$$

deci avem de calculat integrala

$$I = \int_0 \frac{x-2}{x+1} \ln(x+1) dx;$$

putem scrie $\frac{x-2}{x+1} = \frac{x+1-3}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$, deci

$$I = \int_0^1 \frac{x-2}{x+1} \ln(x+1)\, dx = \int_0^1 \ln(x+1)\, dx - 3\int_0^1 \frac{1}{x+1} \ln(x+1)\, dx,$$

$$I_1 = \int_0^1 \ln(x+1)\, dx = \Big[(x+1)\ln(x+1) - (x+1)\Big]_0^1 = 2\ln 2 - 1;$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x+1} \ln(x+1) dx = \int_0^1 \ln(x+1)\, d[\ln(x+1)] =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln^2(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln^2 2;$$

$$I = I_1 - 3I_2 = 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln^2 2 - 1.$$

20. Se dă funcţia

$$f(x) = \frac{x^2 + 2(a-b)x + b^2 - 2ab + 1}{x^2 + 1 - b^2}$$

unde a, b sînt parametri reali. Se cere:

1) ce legătură trebuie să existe între constantele a şi b pentru ca valorile maximă y_1 şi minimă y_2 să satisfacă condiţia $y_1 + y_2 = 0$;

2) în acest caz să se determine valorile a şi b, astfel încît tangenta la graficul funcţiei date în punctul de abscisă $x = 0$ să fie paralelă cu prima bisectoare a axelor de coordonate;

3) să se reprezinte grafic $f(x)$ pentru $a = 2$ şi $b = 3$.

1969 — Inst. Petrol, Gaze şi Geologie, Buc.

R. 1) Domeniul de definiţie, de continuitate cit şi derivabilitate al lui f este R dacă

$$|b| < 1 \text{ şi } R - \{-\sqrt{b^2-1}, +\sqrt{b^2-1}\} \text{ dacă } |b| \geq 1.$$

Extremele funcţiei f se obţin anulînd $f'(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $$f'(x) = \frac{[2x + 2(a-b)][x^2 + 1 - b^2] - 2x[x^2 + 2(a-b)x + b^2 - 2ab + 1]}{(x^2 + 1 - b^2)^2},$$

$$f'(x) = \frac{-2(a-b)x^2 - 2x(2b^2 - 2ab) + 2(a-b)(1-b^2)}{(x^2 + 1 - b^2)^2},$$

$$f'(x) = \frac{-2(a-b)(x^2 - 2bx - 1 + b^2)}{(x^2 + 1 - b^2)^2},$$

$$f'(x) = 0, \quad x^2 - 2bx - 1 + b^2 = 0, \quad x_1 = b - 1, \quad x_2 = b + 1.$$

În aceste puncte f are cîte un extremum

$$y_1 = f(b-1), \quad y_2 = f(b+1),$$

$$y_1 = \frac{(b-1)^2 + 2(a-b)(b-1) + b^2 - 2ab + 1}{(b-1)^2 + 1 - b^2} = \frac{1-a}{1-b},$$

$$y_2 = \frac{(b+1)^2 + 2(a-b)(b+1) + b^2 - 2ab + 1}{(b+1)^2 + 1 - b^2} = \frac{1+a}{1+b};$$

condiția $y_1 + y_2 = 0$ dă

$$\frac{1-a}{1-b} + \frac{1+a}{1+b} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{(1-a)(1+b) + (1+a)(1-b)}{1-b^2} = 0,$$

sau

$$1 - ab = 0, \quad |b| \neq 1.$$

2) Ecuația tangentei este

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

unde $m = f'(0) = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = f(0)$,

$$f'(0) = \frac{-2(a-b)(x^2 - 2bx + b^2 - 1)}{(x^2 + 1 - b^2)^2}\Big|_{x=0} = \frac{2(a-b)(1-b^2)}{(1-b^2)^2},$$

$$f(0) = \frac{b^2 - 2ab + 1}{1 - b^2} = \frac{b^2 - 1}{1 - b^2} = -1.$$

Pentru ca să existe tangenta la grafic în punctul $(0, -1)$ paralela cu prima bisectoare a axelor trebuie să avem în plus

$$\frac{2(a-b)(1-b^2)}{(1-b^2)^2} = 1.$$

Pentru $b^2 < 1$, condiția devine $2(a-b) = 1 - b^2$ care împreună cu $1 - ab = 0$ determină pe a și b. Pentru $b^2 > 1$, cele două ecuații care determină pe a și b sînt

$$2(a-b) = b^2 - 1, \quad 1 - ab = 0.$$

I) Primul caz: $b^2 < 1$,

$$2(a-b) = 1 - b^2, \quad 1 - ab = 0,$$

$$b = \frac{1}{a}, \quad 2\left(a - \frac{1}{a}\right) = 1 - \frac{1}{a^2},$$

sau

$$2a^3 - a^2 - 2a + 1 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = \frac{1}{2},$$

prin urmare sistemul dat are soluțiile:

$$a_1 = 1,\ b_1 = 1;\ a_2 = -1,\ b_2 = -1,$$

$$a_3 = \frac{1}{2},\quad b_3 = 2,$$

soluția $a_3 = \frac{1}{2}$, $b_3 = 2$ trebuie exclusă deoarece $b_3^2 > 1$.

II) Al doilea caz: $b^2 > 1$,

$$2(a - b) = b^2 - 1,\ 1 - ab = 0,$$

$$b = \frac{1}{a},\ 2\left(a - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2} - 1,$$

sau

$$2a^3 + a^2 - 2a - 1 = 0,\ a_1' = 1,\ a_2' = -1,\ a_3' = -\frac{1}{2};$$

în acest caz sistemul are soluțiile

$$a_1' = 1\quad l_1' = 1,\ a_2' = -1,\ b_2' = -1,\ a_3' = -\frac{1}{2},\ b_3' = -2.$$

Trebuie excluse însă cazurile $a = 1$, $b = 1$; $a = -1$, $b = -1$ deoarece pentru toate aceste valori avem

$$f(x) \equiv 1$$

rămîne deci numai soluția $a = -\frac{1}{2}$, $b = -2$.

3) Pentru $a = 2$, $b = 3$ obținem

$$y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 8}$$

mulțimile de definiție, de continuitate și de derivabilitate sînt

$$(-\infty,\ -2\sqrt{2}) \cup (-2\sqrt{2},\ +2\sqrt{2}) \cup (+2\sqrt{2},\ +\infty)$$

$$f(x) = 0,\ x^2 - 2x - 2 = 0,\ x_1 = 1 - \sqrt{3},\ x_2 = 1 + \sqrt{3},$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1,\qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1,$$

dreapta $y = 1$ este o asimptotă orizontală; dreptele $x = 2\sqrt{2}$, $x = -2\sqrt{2}$ sînt asimptote verticale; graficul nu admite asimptote oblice.

$$y' = \frac{(2x - 2)(x^2 - 8) - 2x(x^2 - 2x - 2)}{(x^2 - 8)^2} = \frac{2x^2 - 12x + 16}{(x^2 - 8)^2},$$

$y' = 0,\ x^2 - 6x + 8 = 0,\ x_1' = 2,\ x_2' = 4.$

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variație

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		$1-\sqrt{3}$		0		2		$1+\sqrt{3}$		$2\sqrt{2}$		4		$+\infty$
y'	$+$		$+$		$+$		$+$		0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$ 1
									max								min	

Graficul este dat în figura 66.

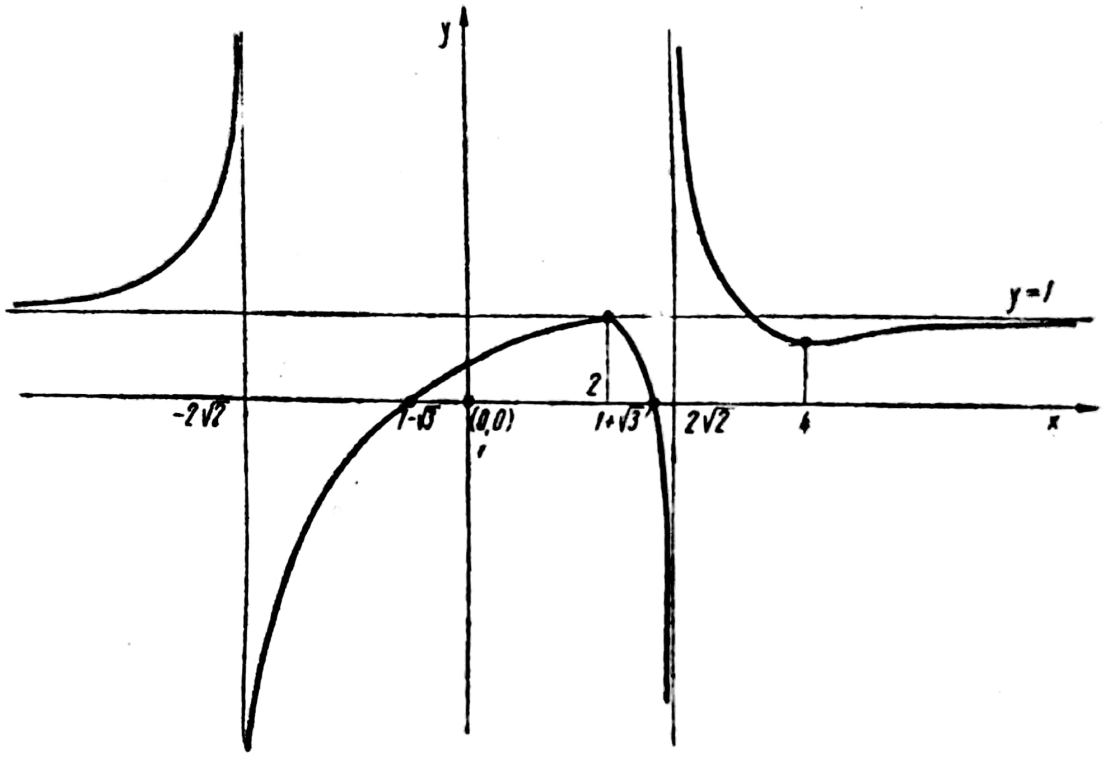


Fig. 66

Se observă că $f'(0) = \frac{16}{4} = \frac{1}{4} \neq 1$, deci $a = 2$, $b = 3$ nu este o soluție a sistemelor în a și b de la pct. 2; deci în punctul $(0, f(0))$ graficul nu admite tangentă paralelă cu prima bisectoare a axelor.

21. Se dă

$$f(x) = 4x + \operatorname{ctg} x$$

și se cere:

1) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;

2) să se determine punctele de inflexiune și să se arate că se găsesc pe o dreaptă;

3) să se calculeze

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4x + \operatorname{ctg} x)\, dx.$$

R. 1) **Funcția** ctg x **nu este definită în punctele** $x = k\pi$, deci mulțimea de definiție a lui f **este** $R - \{k\pi\}$. **Mulțimile de continuitate cît și de derivabilitate de orice ordin sînt egale cu mulțimea de definiție. Funcția nu este periodică. Totuși o vom reprezenta pe** $(0, 2\pi)$, **urmînd să deducem graficul pe toată mulțimea de definiție.**

Avem

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to \pi-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to \pi+} f(x) = +\infty$$

și $\lim\limits_{x\to 2\pi-} f(x) = -\infty$.

$f(x) = 0$, $4x + \operatorname{ctg} x = 0$, o ecuație ale cărei soluții le vom discuta din graficul lui f.

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{\sin^2 x}; \quad f'(x) = 0, \ \sin^2 x = \frac{1}{4},$$

$$\sin x = +\frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \ x_2 = \frac{5\pi}{6}, \ \sin x = -\frac{1}{2}, \ x_3 = \frac{7\pi}{6}, \ x_4 = \frac{11\pi}{6}.$$

Graficul admite asimptotele verticale $x = 0$, $x = \pi$ și $x = 2\pi$.

$$f''(x) = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}; \quad f''(x) = 0, \ x_1' = \frac{\pi}{2}, \quad x_2'' = \frac{3\pi}{2}.$$

Tabloul de variație

x	$0+0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi-0$
$f'(x)$	$-\ -\ 0$		$+\ +\ +\ 0$		$-\ -$	$-\ 0+\ +\ +\ +\ +\ +\ 0$			$-\ -\ -$
$f''(x)$		0					0		
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$ min	$\nearrow 2\pi \nearrow$	$\frac{10\pi}{3} - \sqrt{3}$ max	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow$	$\frac{14\pi}{3} + \sqrt{3}$ min	$\nearrow 6\pi \nearrow$	$\frac{22\pi}{3} - \sqrt{3}$ max $\searrow -\infty$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul pe $(0, 2\pi)$ este dat în figura 67.

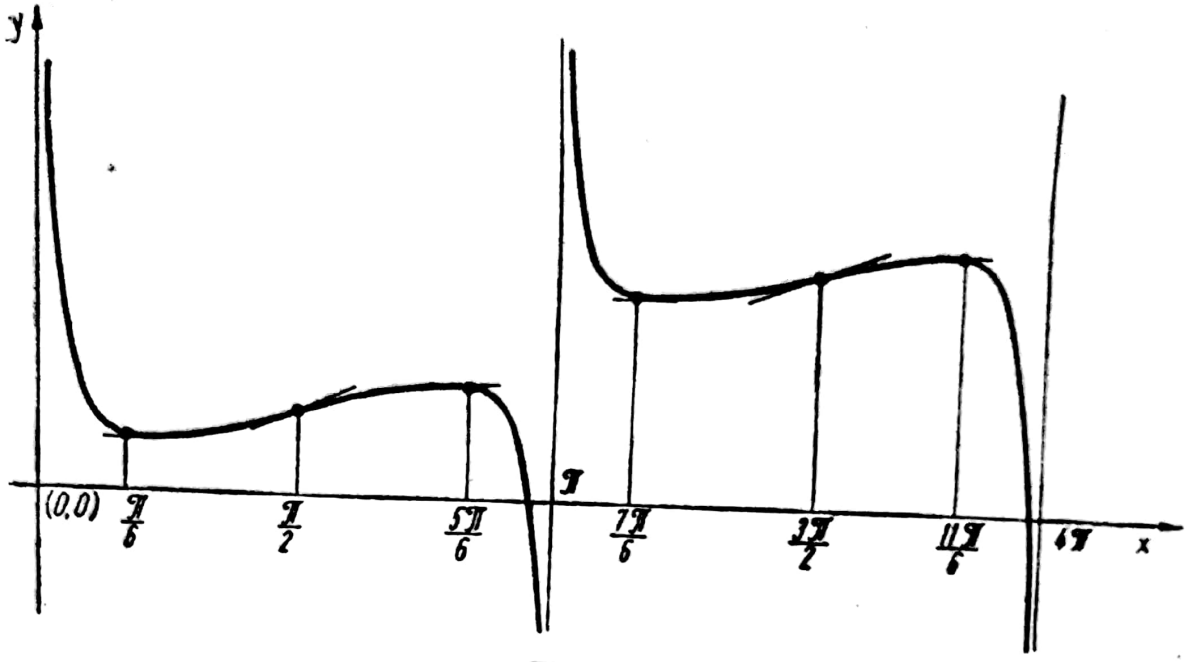


Fig. 67

Am luat pe axa Oy o unitate de ~15 ori mai mică decît cea de pe axa Ox. Graficul pe $R - \{k\pi\}$ este dat în figura 68.

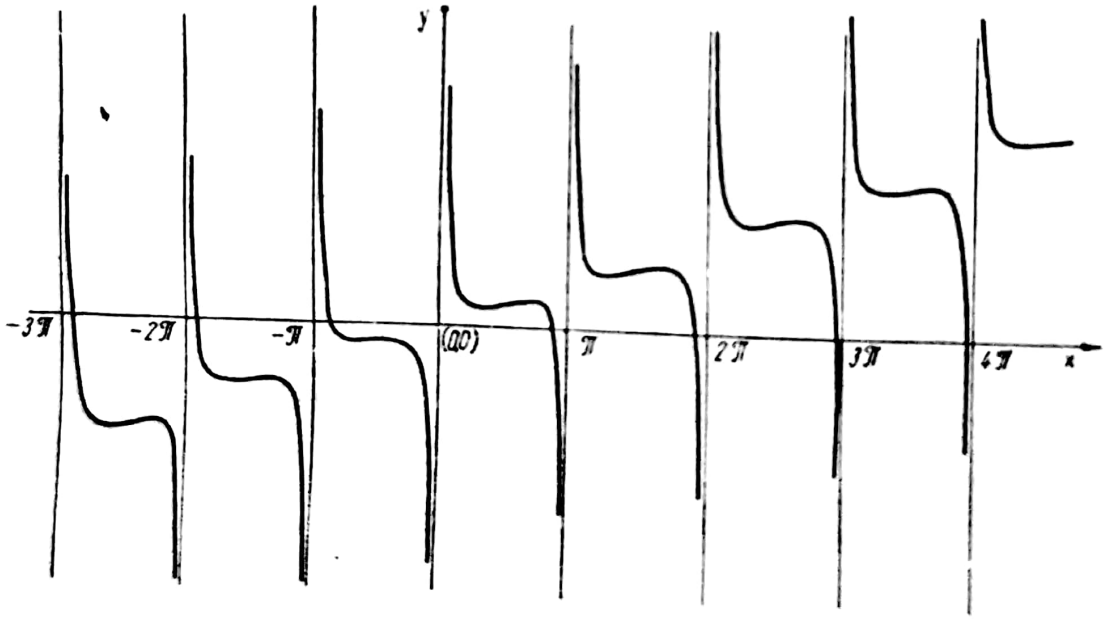


Fig. 68

2) Punctele de inflexiune sînt date de $\cos x = 0$, $x_k = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$.

Pentru $x_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ avem $f(x_k) = (8k + 2)\pi$, iar pentru $x'_k = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, obținem $f(x'_k) = (8k - 2)\pi$.

Prin urmare avem pentru punctele $(x_k, f(x_k))$

$$\frac{x - \frac{\pi}{2}}{y - 2\pi} = \frac{1}{4},$$

deci aceste puncte pentru orice k se găsesc pe dreapta

$$y - 2\pi = 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ sau } y = 4x.$$

Pentru punctele $(x'_k, f(x'_k))$ avem de asemenea

$$\frac{x + \frac{\pi}{2}}{y + 2\pi} = \frac{1}{4},$$

deci aceste puncte se găsesc tot pe dreapta $y = 4x$.

3) Avem

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4x + \operatorname{ctg} x)\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx,$$

$$\mathcal{A} = 2x^2\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \ln \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{\pi^2}{4} - 2\frac{\pi^2}{16} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{8}\pi^2 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{8}\pi^2 + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Observație. Graficul arată că ecuația $4x + \operatorname{ctg} x = 0$ are o infinitate de rădăcini pozitive și o infinitate de rădăcini negative; mai precis, rădăcinile pozitive ξ_k se găsesc în intervalele $\left(k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi\right)$, $k = 1, 2, \ldots$, iar rădăcinile negative ξ'_k se găsesc în intervalele $\left(-k\pi, -k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$.

22. În triunghiul dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A se cunoaște raza r a cercului înscris și unghiul B.

1) Să se calculeze laturile și aria triunghiului ABC în funcție de r și B.

2) Rezultatele găsite să se transforme în formule calculabile prin logaritmi.

3) Notînd $AB = x$, $AC = y$, să se exprime y în funcție de x prin eliminarea lui B și să se reprezinte grafic funcția y astfel obținută.

4) Să se exprime aria S a triunghiului în funcție de x și să se construiască graficul funcției $S(x)$ găsite.

1969. Institutul Politehnic, Timișoara

Scanned with OKEN Scanner

R. 1) Conform figurii 69 avem, $\sphericalangle B = \theta$ și

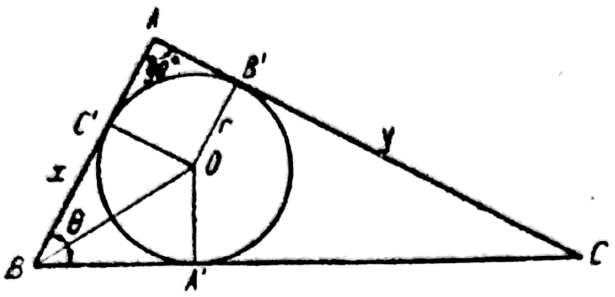


Fig. 69

$$AC' = AB', \quad CB' = CA', \quad BA' = BC'$$

deci

$$BC' = BA' = r \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, \quad AC' = AB' = r, \quad B'C = CA' = r \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right),$$

de unde rezultă

$$AB = r\left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}\right), \quad AC = r\left[1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right],$$

$$BC = r\left[\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right].$$

Aria S a triunghiului ABC este dată de

$$S = \frac{1}{2} r^2 \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}\right)\left[1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right].$$

2) $$1 + \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin \frac{\theta}{2}},$$

deci

$$1 + \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin \frac{\theta}{2}},$$

pe unde

$$AB = \sqrt{2} r \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad AC = \sqrt{2} r \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)},$$

$$BC = r \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\theta}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)},$$

$$S = r^2 \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Avem

$$x = r\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right),\quad y = r\left[1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

însă

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + 1}{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - 1},$$

deci legătura dintre x și y este dată de

$$y(x) = r\left(1 + \frac{\frac{x}{r} - 1 + 1}{\frac{x}{r} - 1 - 1}\right),$$

sau

$$y(x) = 2r\,\frac{x - r}{x - 2r},\quad x > 2r.$$

Mulțimea de definiție al lui y este $x > 2r$. Dreapta $x = 2r$ este o asimptotă verticală. Graficul admite și asimptota orizontală $y = 2r$; nu admite asimptote oblice.

$$y'(x) = 2r\,\frac{x - 2r - (x - r)}{(x - 2r)^2} = \frac{-2r^2}{(x - 2r)^2}.$$

Tabloul de variație:

x	$2r$		$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$
y	$+\infty$	$\searrow$	$2r$

Graficul este dat în figura 70.

4) $S(x) = \frac{1}{2}xy = r\cdot\frac{x(x - r)}{x - 2r},\quad x > 2r.$

Mulțimea de definiție este $x > 2r$. Dreapta $x = 2r$ este asimptotă verticală. Graficul admite asimptotă oblică

$$m = \lim_{x\to\infty} r\,\frac{x(x - r)}{x(x - 2r)} = r,$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left[r\,\frac{x(x - r)}{x - 2r} - rx\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{r^2x}{x - 2r} = r^2.$$

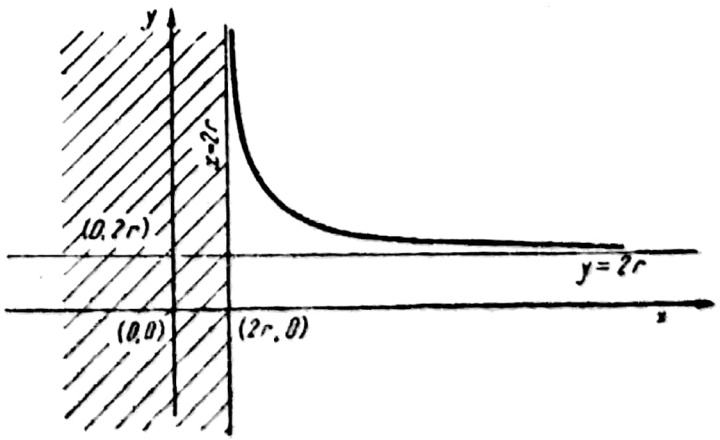


Fig. 70

Asimptota oblică are ecuația

$$y = rx + r^2.$$

$$S'(x) = r\,\frac{(2x - r)(x - 2r) - x^2 + rx}{(x - r)^2}.$$

$$S'(x) = r\,\frac{x^2 - 4rx + 2r^2}{(x - r)^2}, \quad x > 2r.$$

$S'(x) = 0, \qquad x_1 = r(2 + \sqrt{2}), \; x_2 = r(2 - \sqrt{2}).$

Tabloul de variație

x	$2r$					$r(2+\sqrt{2})$					$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$\searrow$			$(3+2\sqrt{2})r^2$ min		$\nearrow$			$+\infty$

Graficul pentru $r = \frac{1}{2}$ este dat în figura 71.

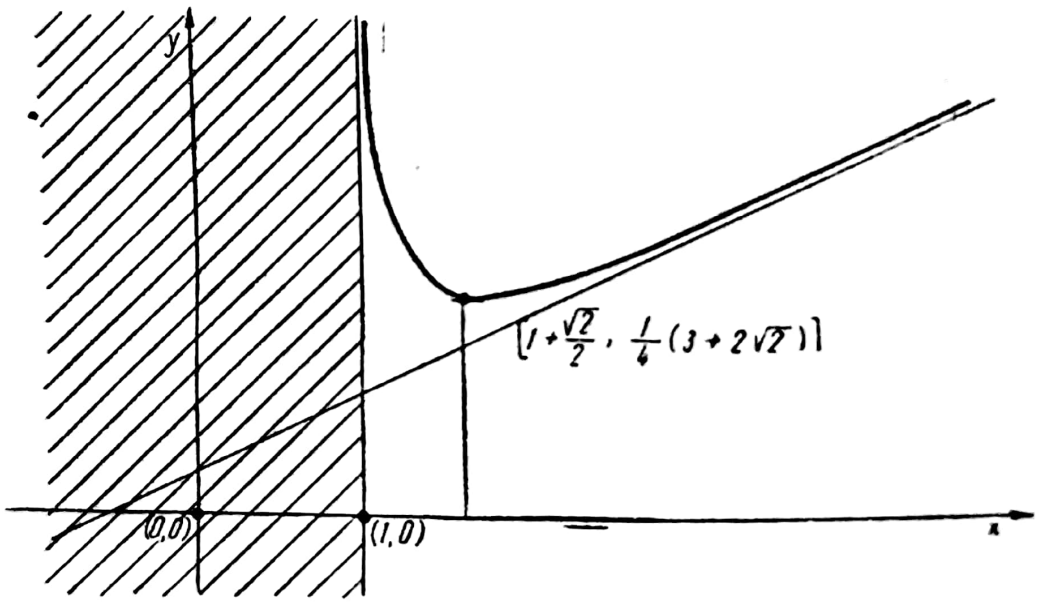


Fig. 71

Punctul de minim se găsește deasupra asimptotei oblice deoarece

$$r(2 + \sqrt{2})\,r + r^2 < r^2(3 + 2\sqrt{2}).$$

23. Se dă ecuația

$$\cos^3 x + (a + a^2)\cos^2 x + (a^3 + a^2 - 1)\cos x + a^3 - a = 0$$

unde a este un parametru.

1) Notînd $y = \cos x$ se obține o ecuație în y. Să se rezolve ecuația astfel obținută.

2) Pentru $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ să se afle toate valorile lui x care verifică ecuația dată.

3) Fie $y_1 = \cos x_1$, $y_2 = \cos x_2$, $y_3 = \cos x_3$, rădăcinile ecuației obținute prin înlocuirea cu $y = \cos x$. Să se calculeze

$$E = \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 + \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_3 + \operatorname{tg} x_3 \operatorname{tg} x_1.$$

4) Folosind teorema lui Rolle să se găsească numărul valorilor reale ale lui a pentru care

$$\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3 + \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 + 1 = 0 .$$

R. 1) Ecuația în y este

$$P(y) = y^3 + (a + a^2)y^2 + (a^2 + a^2 - 1)y + a^3 - a = 0 ,$$

$$P(1) = 2a^3 + 2a^3, \quad P(-1) = 0$$

deci $y_1 = -1$ este o rădăcină. Avem și

$$y^3 + (a + a^2)y^2 + (a^3 + a^2 - 1)y + (a^3 - a) = (y + 1)\,[y^2 + (a^2 + a - 1)y + a^3 - a],$$

deci rădăcinile ecuației în y sînt

$$y_2 = -a, \qquad y_3 = 1 - a^3 \quad \text{și} \quad y_1 = -1.$$

2) Revenind la x avem

a) $\cos x_1 = -1, \qquad x_1 = 2k\pi + \pi ;$

b) $\cos x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x_2 = (2k' + 1)\pi \pm \frac{\pi}{4},$

c) $\cos x_3 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad x_3 = 2k''\pi \pm \frac{\pi}{3}.$

3) Este necesar să calculăm $\sin x_1$, $\sin x_2$, $\sin x_3$

a') $\sin x_1 = \sin (2k\pi + \pi) = 0 ;$

b') $\sin x_2 = \sin\left(2k'\pi + \pi \pm \frac{\pi}{4}\right) = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} ;$

c') $\sin x_3 = \sin\left(2k''\pi \pm \frac{\pi}{3}\right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} ;$

cu aceste valori obținem imediat

sau $$E = \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 + \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_3 + \operatorname{tg} x_3 \operatorname{tg} x_1 = \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} z_3,$$

$$E = (\pm 1)(\pm \sqrt{3}) = \pm \sqrt{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4) Din relaţiile între rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei date avem

$$\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3 = -a - a^2,$$

$$\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 = a - a^2,$$

deci trebuie să avem

$$-a - a^2 + a - a^2 + 1 = 0,$$

sau

$$F(a) = a^2 + a^2 - 1 = 0,$$

$$F'(a) = 3a^2 + 2a = 0,\ F'(a) = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{2}{3}$$

Formăm şirul lui Rolle:

$F(-\infty)$	$F\left(-\frac{2}{3}\right)$	$F(0)$	$F(+\infty)$
$-$	$-$	$-$	$+$

Relaţia de la punctul 4) este satisfăcută pentru o singură valoare a lui $a \in (0,1)$. Pentru această valoare există şi x_2 şi x_3 deoarece $|\cos x_2| < 1$, $|\cos x_3| < 1$

Fără punct 4. 1970 Institutul Politehnic, Bucureşti.

24. Se dă

$$f(x) = \ln (1 + 2 \sin x)$$

şi se cere:

1) să se stabilească mulţimea de definiţie;

2) să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic;

3) să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln(1 + 2 \sin x)\, dx.$$

R. Funcţia este definită pentru valorile lui x astfel încît $1 + 2 \sin x > 0$ sau $\sin x > -\frac{1}{2}$. În intervalul $[0, 2\pi]$ avem $\sin x > -\frac{1}{2}$ pentru $x \in \left[0, \pi + \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(2\pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$.

Funcţia f este periodică de perioada 2π deci mulţimea de definiţie este

$$D = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left(2k\pi - \frac{\pi}{6},\ 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6}\right).$$

2) $f(x) = 0,\ 1 + 2 \sin x = 1,\ \sin x = 0,\ x_1 = k\pi.$

$$\lim_{x \to \pi + \frac{\pi}{6}} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 2\pi - \frac{\pi}{6}} f(x) = -\infty;$$

dreptele $x = \pi + \frac{\pi}{6}$ şi $x = 2\pi - \frac{\pi}{6}$ sînt asimptote verticale.

Scanned with OKEN Scanner

Funcția $f(x)$ este mărginită superior deoarece $\ln(1 + 2 \sin x) \leqslant \ln 3$ pentru orice $x \in D$.

Mulțimea de definiție este și mulțimea de continuitate și de derivabilitate.

$$f'(x) = \frac{2 \cos x}{1 + 2 \sin x}, \quad x \in D,$$

$$f'(x) = 0, \qquad x_1' = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad x_2' = 2k'\pi - \frac{\pi}{2};$$

$$f''(x) = \frac{-2 \sin x(1 + 2 \sin x) - 2 \cos x \, 2 \cos x}{(1 + 2 \sin x)^2} = \frac{-2 \sin x - 4}{(1 + 2 \sin x)^2},$$

$f''(x) < 0$ pentru orice $x \in D$.

Tabloul de variație îl facem numai pentru $[0, 2\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln 3$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$		0

Pe $[0, 2\pi]$ graficul este dat în figura 72.

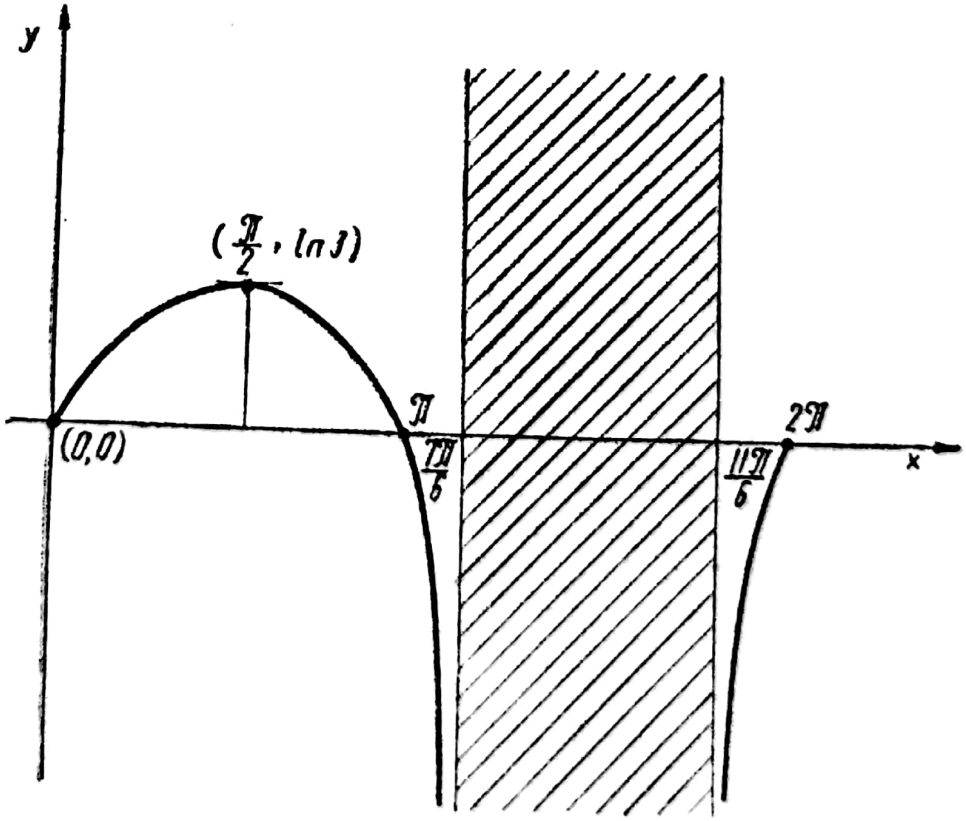


Fig. 72

Pe mulțimea de definiție graficul este dat în figura 73.

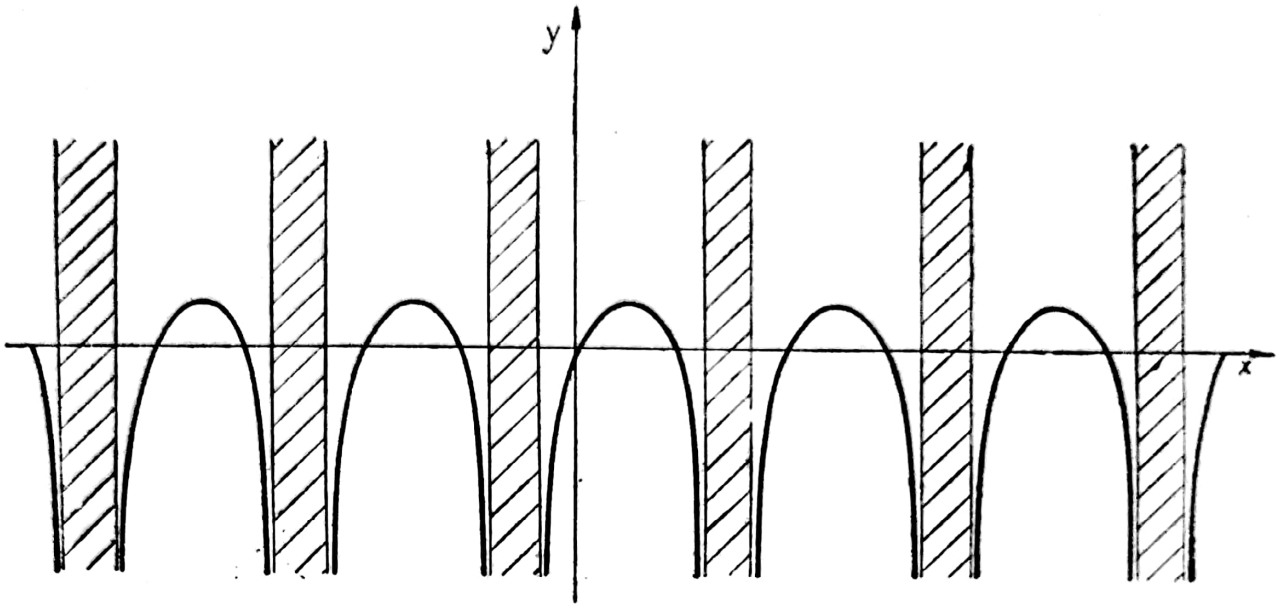


Fig. 73

3) Avem de calculat

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln (1 + 2 \sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x \ln (1 + 2 \sin x)\, dx.$$

Observăm că putem scrie

$$2 \cos x\, dx = d(1 + 2 \sin x),\ \sin x = \frac{1}{2}(1 + 2 \sin x) - \frac{1}{2},$$

iar integrala I se transformă în

$$I = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (1 + 2 \sin x)\, d(1 + 2 \sin x) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \sin x) \ln (1 + 2 \sin x)\, d(1 + 2 \sin x).$$

Avem imediat integrînd prin părți

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (1 + 2 \sin x)\, d(1 + 2 \sin x) = (1 + 2 \sin x) \ln (1 + 2 \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$- (1 + 2 \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3 \ln 3 - 2.$$

Integrala

$$I' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \sin x) \ln (1 + 2 \sin x) \, d (1 + 2 \sin x),$$

o efectuăm prin părți. Punem

$$(1 + 2 \sin x) \, d (1 + 2 \sin x) = du,$$

$$\ln (1 + 2 \sin x) = v,$$

deci

$$u = \frac{1}{2} (1 + 2 \sin x)^2, \qquad dv = \frac{d(1 + 2 \sin x)}{1 + 2 \sin x}.$$

Obținem astfel

$$I' = \frac{1}{2} (1 + 2 \sin x)^2 \ln (1 + 2 \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} (1 + 2 \sin x)^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

deci

$$I' = \frac{9}{2} \ln 3 - 2;$$

$$I = -\frac{1}{2} (3 \ln 3 - 2) + \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} \ln 3 - 2 \right) = \frac{3}{4} \ln 3.$$

25. Se dau matricele

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ \cos x & \sin x \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

și se cere:

1) să se calculeze produsul $A \times B$;

2) notînd cu $f(x)$ determinantul matricei $A \times B$, să se determine valorile lui x pentru care produsul $A \times B$ este o matrice singulară;

3) să se determine relația care există între det $(A \times B)$ și det A;

4) să se calculeze $F(x) = \int f^2 (x) \, dx$.

1969, Institutul Politehnic, Iași.

Scanned with OKEN Scanner

R. 1) Produsul a două matrice pătrate $A \times B$ unde

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{Vmatrix},$$

este dat de matricea pătrată

$$A \times B = \begin{Vmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 & a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 & a_2d_1 + b_2d_2 \end{Vmatrix}.$$

Dacă punem

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ \cos x & \sin x \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

obţinem imediat

$$A \times B = \begin{Vmatrix} \cos x + 1 & 1 \\ \cos^2 x + \sin x & \cos x \end{Vmatrix},$$

2) Matricea $A \times B$ este singulară în punctele în care

$$\det (A \times B) = 0. \text{ Avem}$$

$$\det (A \times B) = \begin{vmatrix} \cos x + 1 & 1 \\ \cos^2 x + \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \cos x - \cos^2 x - \sin x,$$

$$\text{deci } f(x) = \cos x - \sin x, \; x \in R.$$

$$\det (A \times B) = 0 \text{ dacă } \cos x - \sin x = 0,$$

cu soluţiile $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k'\pi.$

3) Avem

$$\det A = \sin x - \cos x, \det B = -1, \det (A \times B) = \cos x - \sin x$$

de unde $\det (A \times B) = \det A \quad \det B,$

sau $\det A = -\det (A \times B).$

4) $F(x) = \int (\cos x - \sin x)^2 dx = \int (1 - 2 \sin x \cos x)\, dx$

$$F(x) = x + \cos^2 x + C, \; x \in R.$$

26. Se dă

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - (x - 2)^2}.$$

1) Să se determine mulţimea de definiţie şi să se construiască graficul.

2) Să se calculeze aria trapezului mixtiliniu format de graficul funcţiei pe intervalul $[0, 2]$.

1969. Institutul Politehnic, Cluj.

Scanned with OKEN Scanner

R. 1) Funcția f se scrie ca sumă a două funcții f_1 și f_2 unde

$$f_1(x) = \sqrt{4 - x^2}, \qquad f_2(x) = \sqrt{4 - (x-2)^2}$$

dacă D_1 și D_2 sînt respectiv mulțimile de definiție ale lui f_1 și f_2, mulțimea de definiție a lui f este intersecție $D_1 \cap D_2$.

Pentru f_1 trebuie să avem $4 - x^2 \geqslant 0$ deci D_1 este intervalul $[-2, 2]$.

Pentru f_2 trebuie să avem $4 - (x-2)^2 = -x^2 + 4x \geqslant 0$, deci D_2 este intervalul $[0, 4]$. Mulțimea de definiție a lui f este intersecția $[-2, 2] \cap [0,4] = [0,2]$. Avem $f(0) = 2$, $f(2) = 2$. Funcția f este derivabilă pe $(0, 2)$.

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{-(x-2)}{\sqrt{-x^2 + 4x}} = \frac{-x(\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4x - x^2}) + 2\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}\sqrt{4x - x^2}},$$

$$f'(x) = 0, \quad \sqrt{4 - x^2}(2 - x) = x\sqrt{4x - x^2},$$

sau

$$(4 - x^2)(2 - x)^2 = x^2(4x - x^2); \qquad x_1 = 1.$$

Avem și

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 2-} f'(x) = -\infty.$$

Tabloul de variație

x	0		1		2
$f'(x)$		$+ \; + \; +$	0	$- \; - \; - \; - \; -$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{3}$ max	$\searrow$	2

Graficul este dat în figura 74.

În punctele (0, 2) și (2, 2) graficul are semitangente verticale.

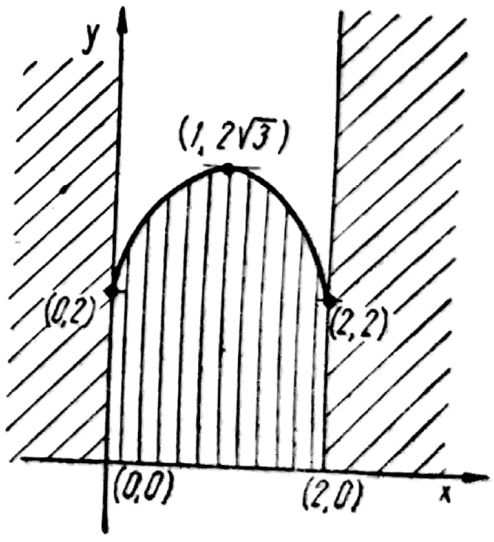


Fig. 74

2) Aria trapezului mixtilinii este dată de

$$\mathcal{A} = \int_0^2 [\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - (x-2)^2}]\, dx;$$

notăm

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx, \quad \mathcal{A}_2 = \int_0^2 \sqrt{4 - (x-2)^2}\, dx.$$

Pentru calculul integralei definite $\mathcal{A}_1$ punem $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\,dt$; intervalul $[0, 2]$ se transformă în $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Avem

$$\mathcal{A}_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \pi.$$

Pentru calculul integralei definite $\mathcal{A}_2$ punem $x - 2 = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\,dt$; intervalul $[0, 2]$ se transformă în $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. $\mathcal{A}_2 = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 t\,dt = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \pi.$

Aria trapezului mixtiliniu este $\mathcal{A} = 2\pi$.

27. Se dă ecuaţia

$$(a^2-1)x^4 - (a^2+3)x^3 - (3a^2+1)x^2 + (5a^2+3)x - 2(a^2-1) = 0$$

unde a este un parametru.

1) Să se rezolve ecuaţia ştiind că admite două rădăcini întregi independente de a.

2) Să se arate că pentru orice $a \in R$ avem

$$-\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{x_1+x_2+x_3+x_4} < 1.$$

3) Să se arate că pentru $a = \alpha + i\beta$, (complex) cu $|a| \geqslant 1$, partea reală a rădăcinilor complexe este pozitivă.

4) Folosind teorema lui Rolle să se determine numărul valorilor reale ale lui a pentru care

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 = a.$$

R. 1) Relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi ne dau

$$x_1x_2x_3x_4 = -2,$$

deci ecuaţia nu poate avea decît rădăcini întregi, independente de a: $+1$, -1, $+2$, -2

$$f(+1) = a^2 - 1 - a^2 - 3 - 3a^2 - 1 + 5a^2 + 3 - 2a^2 + 2 = 0,$$

$$f(-1) = a^2 - 1 + a^2 + 3 - 3a^2 - 1 - 5a^2 - 3 - 2a^2 + 2 = -8a^2 \neq 0,$$

$$f(+2) = 16(a^2-1) - 8(a^2+2) - 4(3a^2+1) + 2(5a^2+3) - 2(a^2-1) \neq 0,$$

$$f(-2) = 16(a^2-1) + 8(a^2+3) - 4(3a^2+1) - 2(5a^2+3) - 2(a^2-1) = 0.$$

Ecuaţia admite rădăcinile întregi $x_1 = 1$ şi $x_2 = -2$. Dacă împărţim cu $(x-1)(x+2)$ obţinem factorizarea ecuaţiei din enunţ

Scanned with OKEN Scanner

$$(x-1)(x+2)\,[(a^2-1)x^2-2(a^2+1)x+a^2-1]=0;$$

celelalte două rădăcini sînt date de

$$(a^2-1)x^2-2(a^2+1)x+a^2-1=0,$$

$$\text{deci } x_3=\frac{a^2+1+\sqrt{(a^2+1)^2-(a^2-1)^2}}{a^2-1}=\frac{a^2+1+2a}{a^2-1}=\frac{a+1}{a-1},$$

$$x_4=\frac{a^2+1-2a}{a^2-1}=\frac{a-1}{a+1}.$$

2) Relațiile dintre rădăcini și coeficienți dau

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{a^2+3}{a^2-1},$$

deci

$$\frac{1}{x_1+x_2+x_3+x_4}=\frac{a^2-1}{a^2+3};$$

avem însă

$$\frac{a^2-1}{a^2+3}=1-\frac{4}{a^2+3} \text{ și } -\frac{1}{3}\leqslant 1-\frac{4}{a^2+3}<1,$$

deoarece $\max\left(-\frac{4}{a^2+3}\right)=0$, $\min\left(-\frac{4}{a^2+3}\right)=-\frac{4}{3}$,

rezultă imediat că pentru $a\in R$,

$$-\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{x_1+x_2+x_3+x_4}<1.$$

3) În expresia lui x_3 să înlocuim pe a cu $\alpha+i\beta$; obținem

$$\frac{a+1}{a-1}=\frac{(\alpha+1)+i\beta}{(\alpha-1)+i\beta}=\frac{[(\alpha+1)+i\beta][(\alpha-1)-i\beta]}{(\alpha-1)^2+\beta^2},$$

deci

$$\frac{a+1}{a-1}=\frac{\alpha^2-1+\beta^2}{(\alpha-1)^2+\beta^2}+i\frac{-2\beta}{(\alpha-1)^2+\beta^2}.$$

În mod asemănător obținem

$$\frac{a-1}{a+1}=\frac{[(\alpha-1)+i\beta][(\alpha+1)-i\beta]}{(\alpha+1)^2+\beta^2},$$

$$\frac{a-1}{a+1}=\frac{\alpha^2-1+\beta^2}{(\alpha+1)^2+\beta^2}+i\frac{2\beta}{(\alpha+1)^2+\beta^2}.$$

Prin urmare Real $x_3\geqslant 0$ și Real $x_4\geqslant 0$ ne conduc la aceeași condiție

deci $$\alpha^2-1+\beta^2\geqslant 0 \quad \text{sau} \quad \alpha^2+\beta^2\geqslant 1,$$

$$|a|\geqslant 1.$$

4) Relațiile dintre rădăcini și coeficienți ne dau

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=-\frac{3a^2+1}{a^2-1},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci trebuie să avem cu $a^2 \neq 1$,

$$-\frac{3a^2+1}{a^2-1} = a, \qquad a^3+3a^2-a+1=0,$$

$$f(a) = a^3+3a^2-a+1,$$

$$f'(a) = 3a^2+6a-1=0, \qquad f'(a)=0,$$

$$a_1 = \frac{1}{3}(-3+\sqrt{12}), \qquad a_2 = \frac{1}{3}(-3-\sqrt{12}).$$

Formăm şirul lui Rolle

$f(-\infty)$	$f\left(-1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$f\left(-1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$f(+\infty)$
$-$	$+$	$+$	$+$

deoarece

$$f\left(-1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3+3\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+1+\frac{2}{\sqrt{3}}+1>0,$$

$$f\left(-1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)^3+3\left(-1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+1-\frac{2}{\sqrt{3}}+1>0.$$

Există o singură valoare reală negativă a lui a care verifică ecuaţia $f(a)=0$. Deoarece $f(-3)>0$, $f(-4)<0$ rezultă că această valoare se găseşte în intervalul $(-4, -3)$.

Fără punctul 4, 1970, Institutul Politehnic, Bucureşti.

28. Un trunchi de con este circumscris unei sfere de rază R.

1) Să se stabilească relaţia care există între razele bazelor şi R.
2) Să se calculeze volumul şi aria totală a trunchiului de con.
3) Să se studieze variaţia volumului trunchiului de con.

1969, Institutul Politehnic, Galaţi.

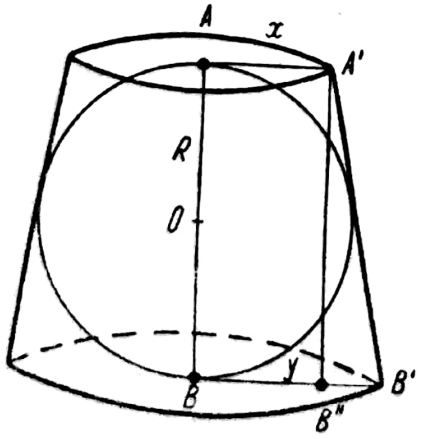


Fig. 75

R. 1) Notăm cu x şi y razele bazelor (fig. 75) cu O centrul sferei şi cu A, B punctele diametral opuse pe sferă, în care planele bazelor sînt tangente la sferă: $OA = OB = R$.

Observăm că generatoarea trunchiului de con este $G = A'B' = x+y$. Fie B'' proiecţia lui A' pe BB'. În triunghiul dreptunghic $A'B''B'$ avem

$$(x+y)^2 = 4R^2+(y-x)^2,$$

sau

$$xy = R^2,$$

care este relaţia căutată.

2) Volumul trunchiului de con este dat de

$$V = \frac{2R}{3}(\pi x^2+\pi y^2+\pi xy),$$

Scanned with OKEN Scanner

și dacă considerăm pe x variabilă independentă rezultă, $x > 0$, și

$$V(x) = \frac{2\pi R}{3}\left(x^2 + \frac{R^4}{x^2} + R^2\right) = \frac{2\pi}{3} R \frac{x^4 + x^2R^2 + R^4}{x^2}.$$

Aria totală a trunchiului de con este dată de

$$A_t = \frac{2\pi x + 2\pi y}{2} G = \pi(x + y)^2,$$

deci

$$A_t(x) = \pi\left(x + \frac{R^2}{x}\right)^2 = \pi\left(\frac{x^2 + R^2}{x}\right)^2.$$

3) Avem de studiat funcția

$$V(x) = \frac{2}{3}\pi R \frac{x^4 + x^2R^2 + R^4}{x^2},$$

cu mulțimea de definiție $(0, +\infty)$.

$V(x) = 0$, nu are soluții reale

$V(x)$ este derivabilă pe mulțimea de definiție,

$$V'(x) = \frac{2}{3}\pi R \frac{(4x^3 + 2xR^2)x^2 - 2x(x^4 + x^2R^2 + R^4)}{x^4},$$

$$V'(x) = \frac{4}{3}\pi R \frac{x^4 - R^4}{x^3}, \quad V'(x) = 0, \qquad x = R.$$

Prin urmare pentru $x = R$, $V(x)$ are un extremum

$$V''(x) = \frac{4}{3}\pi R \frac{4x^4 - 3x^2(x^4 - R^4)}{x^6}, \quad V''(R) > 0,$$

deci pentru $x = R$, volumul $V(x)$ este minim.

Avem efectiv

$$V(R) = 2\pi R^3.$$

Pentru $x = R$, trunchiul de con are $x = y = R$ deci este cilindrul circumscris sferei.

29. Se dă ecuația în x

$$4x^3 - 8x^2 - yx + 3y = 0.$$

1) Să se determine valorile parametrului y astfel încît ecuația să admită o rădăcină dublă, și în acest caz să se rezolve.

2) Să se arate că funcția y poate fi pusă sub forma

$$y(x) = P(x) + \frac{k}{x - 3}, \quad x \neq 3,$$

unde $P(x)$ este un polinom, iar k o constantă ce se vor determina.

Scanned with OKEN Scanner

3) Să se calculeze aria domeniului plan limitat de graficul funcției $y(x)$, axa Ox pentru $x \in [0, 2]$.

1969, Institutul Politehnic, Iași.

R. 1) Ecuația

$$4x^3 - 8x^2 - yx + 3y = 0.$$

și ecuația obținută prin derivare în raport cu x

$$12x^2 - 16x - y = 0,$$

trebuie să aibă o rădăcină comună. Eliminînd pe y între cele două ecuații, rădăcina comună trebuie să fie soluție și a ecuației obținute prin eliminare:

$$4x^3 - 8x^2 - (x - 3)(12x^2 - 16x) = 0,$$

sau

$$8x^3 - 44x^2 + 48x = 0,$$

cu soluțiile

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = 4,$$

care dau valorile lui y corespunzătoare

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 3, \qquad y_3 = 128.$$

$y = 0$; ecuația

$$4x^3 - 8x^2 = 0, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 2$$

are $x = 0$ rădăcină dublă;
$y = 3$; ecuația

$$4x^3 - 8x^2 - 3x + 9 = 0, \quad x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = -1$$

are $x = \frac{3}{2}$ rădăcină dublă

$y = 128$; ecuația

$$4x^3 - 8x^2 - 128x + 384 = 0, \qquad x_1 = 4, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = -6$$

are $x = 4$ rădăcina dublă.

2) Avem

$$4x^3 - 8x^2 + y(-x + 3) = 0,$$

deci

$$y(x) = \frac{4x^3 - 8x^2}{x - 3}, \qquad x - 3 \neq 0.$$

Facem împărțirea polinomului $4x^3 - 8x^2$ cu $x - 3$. Putem scrie

$$4x^3 - 8x^2 \equiv 4x^2(x - 3) + 4x(x - 3) + 12(x - 3) + 36$$

deci

$$y(x) = 4x^2 + 4x + 12 + \frac{36}{x - 3},$$

deci $P(x) = 4x^2 + 4x + 12, \qquad k = 36.$

3) Aria $\mathcal{A}$ a domeniului plan limitat de graficul funcției y și axa Ox pentru $x \in [0, 2]$ este dată de

$$\mathcal{A} = \int_0^2 \left(4x^2 + 4x + 12 + \frac{36}{x - 3}\right) dx,$$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 12x + 36 \ln |x - 3|\right]_0^2 = \frac{32}{3} + 8 + 24 - 36 \ln 3 = \frac{128}{3} - 36 \ln 3.$$

30. Se dă ecuația diferențială

$$e^y y' + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0$$

și se cere:

1) să se integreze;

2) să se determine soluția particulară care satisface condiția inițială $y(0) = 0$;

3) să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția determinată la punctul 2.

R. 1) Se separă variabilele

$$e^y dy = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1} dx,$$

prin integrare obținem

$$e^y = \int \frac{1 - x^2}{1 + x^2} dx = \int \left(-1 + \frac{2}{1 + x^2}\right) dx,$$

deci

$$(\alpha) \qquad e^y = -x + 2\operatorname{Arctg} x + C.$$

2) Trebuie să avem $y(0) = 0$. Din (α) rezultă

$$y = \ln (2 \operatorname{Arctg} x - x + C)$$

deci

$$0 = \ln C, \qquad C = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

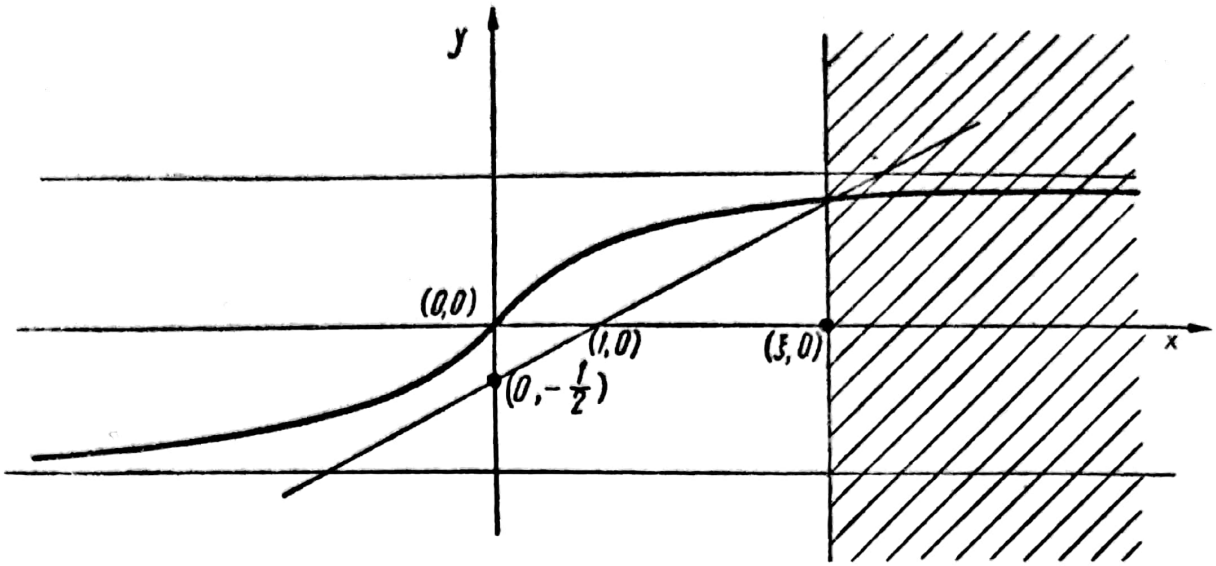


Fig. 76

Soluţia particulară căutată este

$$(\beta) \qquad y = \ln (2 \operatorname{Arctg} x - x + 1),$$

cu domeniul de definiţie definit de $2 \operatorname{Arctg} x - x + 1 > 0$.

Dacă trasăm graficele funcţiilor (fig. 76).

$$y_1 = \operatorname{Arctg} x, \qquad y_2 = \frac{x-1}{2}$$

observăm că se intersectează într-un singur punct $\xi \in (1, \infty)$ pentru $x \in (-\infty, \xi)$ funcţia $y(x)$ dată de (β) este definită. Calculăm derivata lui $y(x)$,

$$y' = \frac{1}{2 \operatorname{Arctg} x - x + 1}\left(\frac{2}{1+x^2} - 1\right) = \frac{1}{2 \operatorname{Arctg} x - x + 1} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$y' = 0, \qquad 1 - x^2 = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad x_2 = -1.$$

Tabloul de variaţie

x	$-\infty$		-1		0		1		ξ
y'		$- - - -$	0	$+ +$	$+$	$+$	0	$- - - -$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$ A	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln \frac{\pi}{2}$ B	$\searrow$	$-\infty$

Graficul este dat în figura 77.

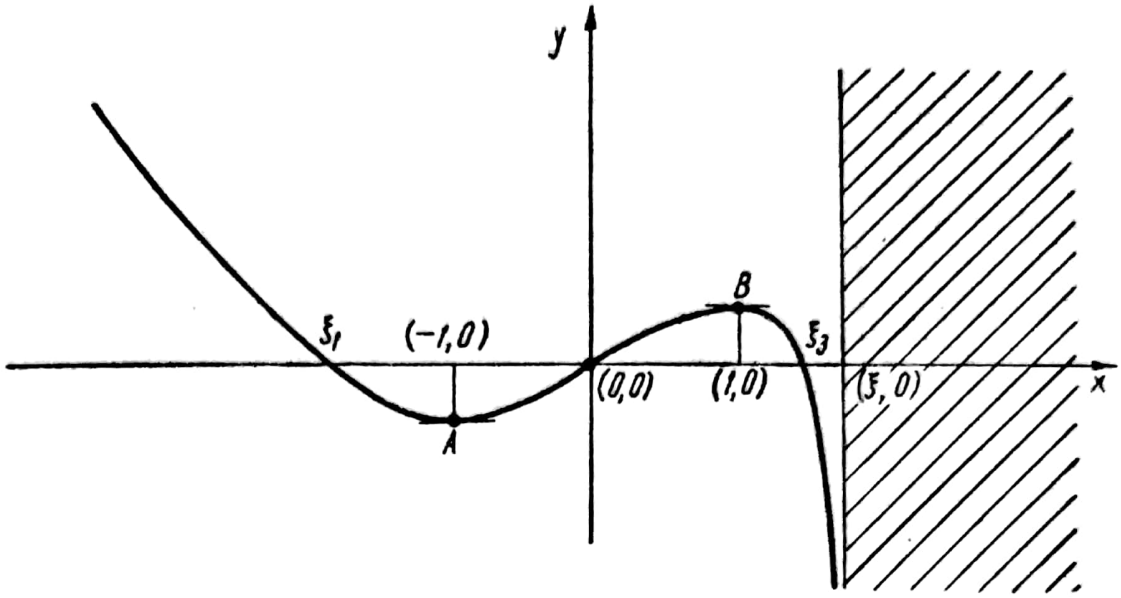


Fig. 77

Din grafic rezultă că ecuația $2 \operatorname{Arctg} x = x$ are trei rădăcini reale $\xi_1 < -1$, $\xi_2 = 0$ și $\xi_3 > +1$.

31. Se dă

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x \sin \alpha + \cos^2 \alpha}.$$

1) Să se determine limitele parametrului $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încît funcția să aibă valori finite pentru $x \in R$.

2) Să se reprezinte grafic funcția în condiția de la punctul 1).

Se va determina numai numărul punctelor de inflexiune.

1969. Institutul Politehnic, Galați.

R. 1) Pentru ca funcția f să fie finită pentru orice x trebuie să determinăm pe α astfel încît ecuația

$$x^2 + 2x \sin \alpha + \cos^2 \alpha = 0,$$

să aibă rădăcinile imaginare. De aici rezultă

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha < 0,$$

și, pentru că $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, urmează $\sin \alpha < \cos \alpha$, deci $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Prin urmare pentru $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$, f este definită pe R.

2) $f(x) = 0$, $x_1 = 0$; deoarece numitorul nu se anulează, nu avem asimptote verticale;

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

graficul admite asimptotă orizontală $y = 0$; nu admite asimptote oblice.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x \sin \alpha + \cos^2 \alpha - x(2x + 2 \sin \alpha)}{(x^2 + 2x \sin \alpha + \cos^2 \alpha)^2},$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + \cos^2 \alpha}{(x^2 + 2x \sin \alpha + \cos^2 \alpha)^2}, \quad x \in R,$$

$$f'(x) = 0, \qquad x_1' = \cos \alpha, \qquad x_2' = -\cos \alpha.$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 + 2x \sin \alpha + \cos^2 \alpha) + 2(2x + 2 \sin \alpha)(x^2 - \cos^2 \alpha)}{(x^2 + 2x \sin \alpha + \cos^2 \alpha)^3},$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x \cos^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{(x^2 + 2x \sin \alpha + \cos^2 \alpha)^3},$$

Pentru a afla numărul punctelor de inflexiune ale graficului trebuie să cercetăm numărul de rădăcini reale ale ecuației $f''(x) = 0$, sau

$$g(x) = 2x^3 - 6x \cos^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos^2 \alpha = 0,$$

$$g'(x) = 6x^2 - 6 \cos^2 \alpha = 0, \quad x_1'' = \cos \alpha, \quad x_2'' = -\cos \alpha.$$

Formăm șirul lui Rolle

$g(-\infty)$	$g(-\cos \alpha)$	$g(\cos \alpha)$	$g(+\infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$

deoarece $g(-\cos \alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 4 \sin \alpha \cos^2 \alpha = 4 \cos^2 \alpha (1 - \sin \alpha) > 0$,
și $g(+\cos \alpha) = -4 \cos^3 \alpha - 4 \sin \alpha \cos^2 \alpha < 0$.

Din cele de mai sus rezultă că graficul are trei puncte de inflexiune.

Tabloul de variație

x	$-\infty$		$-\cos \alpha$		0		$\cos \alpha$		$+\infty$
$f'(x)$	$- - - -$		0	$+ +$		$+ +$	0	$- - -$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2} \frac{1}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2} \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ max	$\searrow$	0

Graficul este dat în figura 78.

Scanned with OKEN Scanner

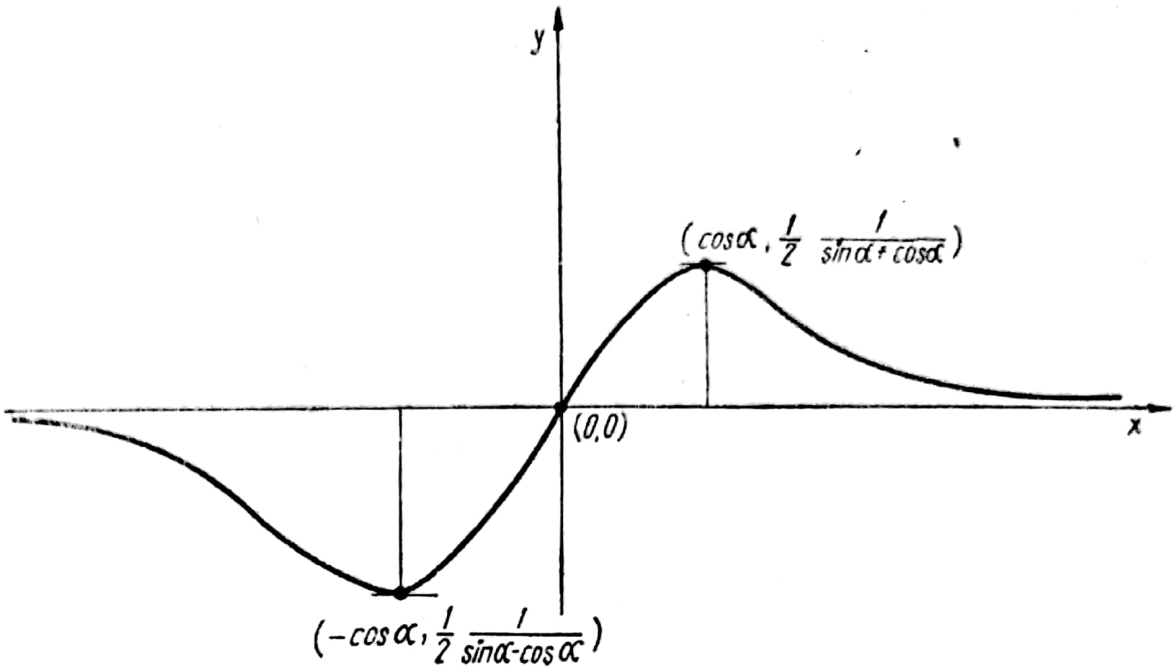


Fig. 78

În origine $f'(0) = 1$, deci graficul în origine are tangentă prima bisectoare a axe or. Din grafic se confirmă că $f''(x) = 0$ pentru $x_1 < -\cos\alpha$, $x_2 \in (-\cos\alpha, \cos\alpha)$ și $x_3 > \cos\alpha$.

32. 1) Se dă ecuația

$$x^3 + x^2 + mx + n = 0 \ ;$$

să se determine numerele reale m, n știind că rădăcinile ecuației sînt

$$x_1 = \cos\alpha, \ x_2 = \cos 2\alpha, \ x_3 = \cos 3\alpha, \ \alpha \in [0, \pi].$$

2) Se dă funcția

$$f(x) = (1 - x)\, e^x, \ x \in R \, ;$$

să se reprezinte grafic studiind și concavitatea graficului.

1969. Institutul de Construcții, București.

R. 1) Relațiile dintre rădăcini și coeficienți dau

$$n = -\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha,$$

$$m = \cos\alpha \cos 2\alpha + \cos 3\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \cos 3\alpha,$$

și

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = -1.$$

Din ultima relație determinăm pe $\alpha \in [0, \pi]$. Avem

$$(\cos 0 + \cos 3\alpha) + (\cos \alpha + \cos 2\alpha) = 0$$

sau

$$2\cos^2 \frac{3\alpha}{2} + 2\cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 0,$$

sau

$$2\cos \frac{3\alpha}{2}\left(\cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right) = 4\cos \frac{3\alpha}{2} \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2} = 0,$$

$$\frac{3\alpha_1}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\alpha_2}{2} = \frac{3\pi}{2}, \quad \alpha_1' = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{2}\alpha_1'' = \frac{\pi}{2}.$$

Avem, așadar, în $[0, \pi]$ soluțiile

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3 = \pi.$$

Numerele m și n se obțin imediat și sînt date în tabloul următor

$\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$,	$m_1 = -\frac{1}{4}$,	$n_1 = -\frac{1}{4}$;
$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$,	$m_2 = 0$,	$n_2 = 0$;
$\alpha_3 = \pi$,	$m_3 = -1$,	$n_2 = -1$.

2) Mulțimea de definiție a lui $f(x)$ dată de

$$f(x) = (1 - x)e^x,$$

este R.

$$f(x) = 0, \quad x = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

$$f'(x) = -e^x + (1 - x)e^x = -xe^x, \quad x \in R,$$

$$f'(x) = 0, \quad x = 0.$$

$$f''(x) = -e^x - xe^x = -(1 + x)e^x,$$

$$f''(x) = 0, \quad x = -1.$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+ + +$		$+ +$		0	$- - -$		$- - -$	
$f''(x)$	$+ + +$	0	$- - -$		$- - -$		$- - -$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Graficul este dat în figura 79.

Scanned with OKEN Scanner

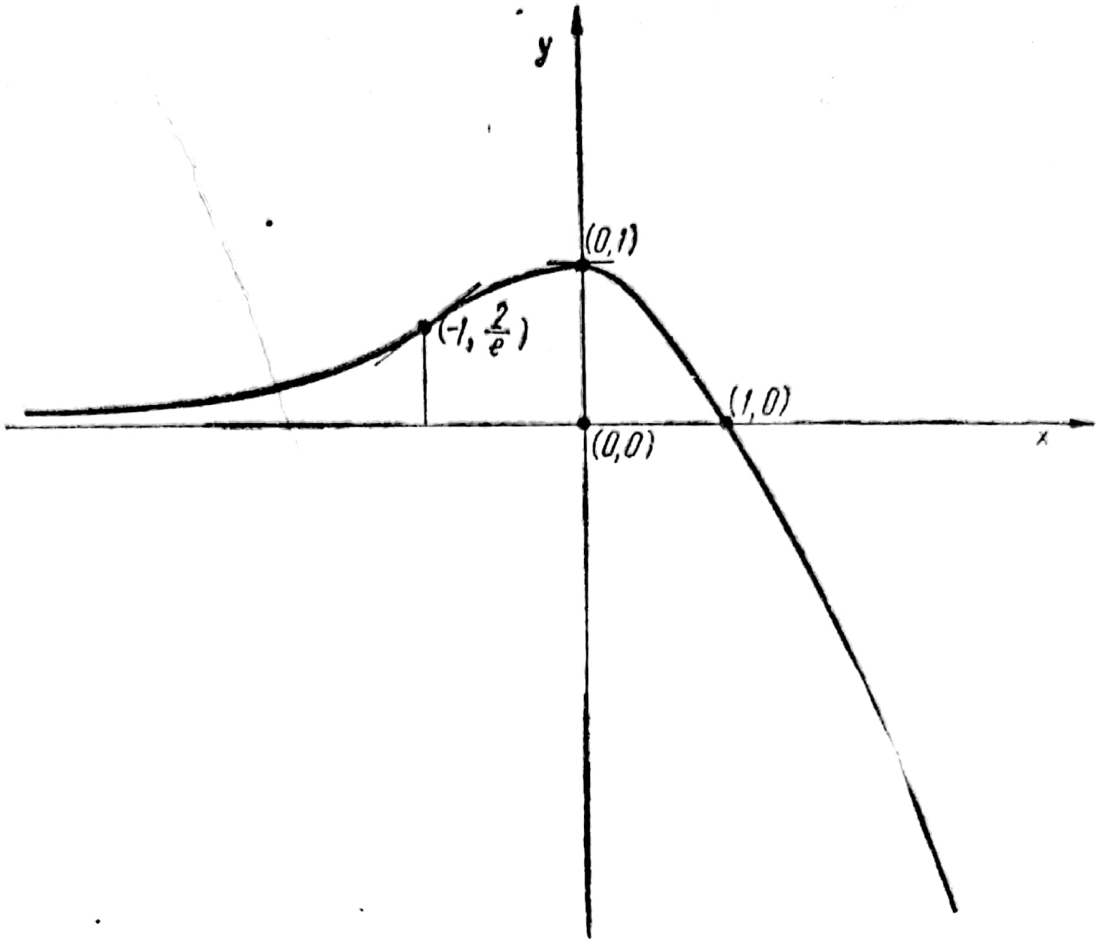


Fig. 79

În intervalul $(-\infty, -1)$ funcția este convexă; în intervalul $(-1, +\infty)$ funcția este concavă. În punctul de inflexiune $f'(-1) = \frac{1}{e}$, deci panta tangentei este $\frac{1}{e}$.

33. Se dă funcția

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right|, \quad x \in R.$$

1) Să se studieze variația și să se reprezinte grafic.

2) Să se calculeze aria domeniului delimitat de graficul funcției f și de dreptele $y = 0$ și $5y = 6x$.

3) Să se calculeze limitele laterale ale funcției $f'(x)$ în punctul $x = 1$.

4) Să se găsească unghiul format de dreptele care trec prin punctul $(1, 0)$ și au drept coeficienți unghiulari aceste două limite.

Scanned with OKEN Scanner

5) Să se calculeze aria triunghiului format de aceste drepte și dreapta $y = 1$.

1969, Facultatea de Matematică, Timișoara

R. 1) Domeniul de definiție este R. Funcția este continuă pe R.

$$f(x) = 0, \qquad x_1 = +1, \qquad x_2 = -1;$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ deci graficul admite asimptota orizontală $y = 1$. Avem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 1}, & x \in (-1, +1), \\ \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} & x \in R - [-1, +1], \\ 0, & |x| = 1, \end{cases}$$

de unde rezultă că $f(x)$ este derivabilă pe $R - \{-1, +1\}$. Avem

$$f'(x) = \frac{-2x(1 + x^2) + 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in (-1, +1),$$

$$f'(x) = \frac{2x(1 + x^2) + 2x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in R - [-1, +1].$$

Din expresia lui $f'(x)$ pe cele două mulțimi rezultă

$$f'(-1 + 0) = +1, \qquad f'(+1 - 0) = -1,$$
$$f'(-1 - 0) = -1, \qquad f'(+1 + 0) = +1,$$

deci f nu are derivată în punctele -1 și $+1$. În aceste puncte derivatele la dreapta și la stînga există și sînt finite însă sînt diferite.

$$f'(x) = 0, \qquad x_1 = 0, \qquad x \in (-1, +1).$$

$$f''(x) = \frac{-4(1 + x^2) + 4x \cdot 4x}{(1 + x^2)^3} = 4\,\frac{3x^2 - 1}{(1 + x^2)^3}, \quad x \in (-1, +1),$$

$$f''(x) = 4\,\frac{1 - 3x^2}{(1 + x^2)^3}, \qquad x \in R - [-1, +1].$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-\ -\ -\ -$		$+\ +\ +\ +$		$+\ +\ +\ +$	0	$-\ -\ -$		$-\ -\ -$		$+\ +\ +\ +$	
$f''(x)$		$-\ -\ -\ -$		$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$		$-\ -\ -\ -$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0 min	$\nearrow$		$\nearrow$	1 max	$\searrow$		$\searrow$	0 min	$\nearrow$	1

Graficul este dat în figura 80.

Scanned with OKEN Scanner

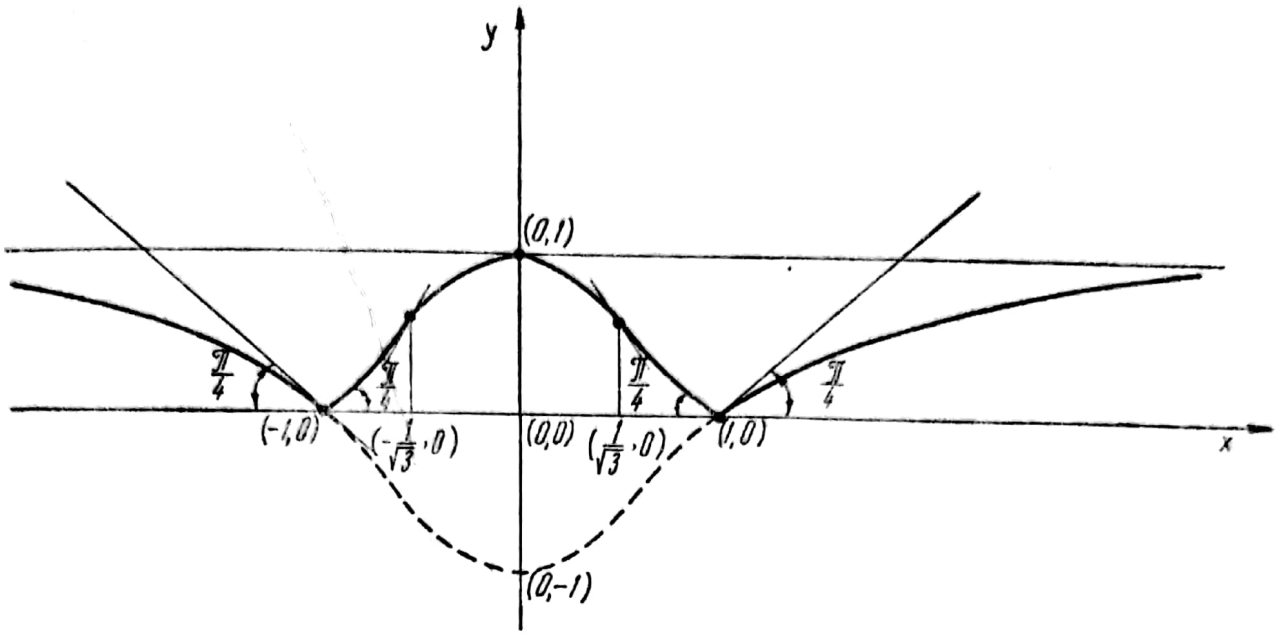


Fig. 80

În punctele de abscise -1 și $+1$, $f(x)$ este minimă însă în aceste puncte derivata $f'(x)$ nu se anulează; aceste puncte sînt unghiulare.

Observație. Graficul funcției

$$f^*(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}, \qquad x \in R,$$

se obține din figura 80, înlocuind pe $[-1, +1]$ arcul trasat continuu cu arcul desenat punctat. Observăm că pe $[-1, +1]$ arcul trasat continuu se obține prin rabaterea pe semiplanul $y > 0$, a arcului trasat punctat. Datorită acestui fapt punctele graficului $(-1, 0)$ și $(+1, 0)$ devin puncte unghiulare; în aceste puncte derivatele laterale sînt egale și de semne contrarii.

2) Trebuie să intersectăm graficul cu dreapta $y = \frac{6}{5}x$. Din figura 80 se vede că punctul de intersecție are abscisa $x \in [0, 1]$ deci în acest interval luăm

$$f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}.$$

Obținem

$$\frac{6}{5}x = \frac{1 - x^3}{1 + x^3} \text{ sau } 6x^3 + 5x^2 + 6x - 5 = 0.$$

Ecuația

$$6x^3 + 5x^2 + 6x - 5 = 0,$$

are o rădăcină reală în intervalul $(0, 1)$ deoarece $f(0) = -5 < 0$, $f(1) = 12 > 0$. Observăm că $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{8} + \frac{5}{4} + \frac{6}{2} - 5 = 0$,

deci rădăcina căutată este $\frac{1}{2}$. Aria cerută $\mathcal{A}$ este dată de

$$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6}{5} x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx,$$

$$\mathcal{A} = \frac{3}{5}x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} - x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + 2\operatorname{arctg} x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1},$$

$$\mathcal{A} = \frac{3}{20} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{7}{20} - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

4) Deoarece $f'(1-0) = -1$, $f'(1+0) = +1$, rezultă că unghiul format de cele două semitangente la grafic este $\frac{\pi}{2}$.

5) Triunghiul format de cele două semidrepte și $y = 1$ este dreptunghic isoscel cu înălțimea egală cu 1, deci aria S a acestui triunghi este $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$.

34. Se dă ecuația diferențială

$$3e^{-3x} y^2 y' = (3x^2 - 7x - 15)$$

și se cere:

1) să se integreze;

2) să se determine soluția particulară care satisface condiția inițială $y(4) = 0$, cît și mulțimea ei de definiție;

3) să se studieze variația și să se reprezinte grafic soluția particulară obținută la punctul 2.

R. 1) Observăm că se separă variabilele

$$3y^2 y' = (3x^2 - 7x - 15)e^{3x}$$

sau

$$3y^2 dy = (3x^2 - 7x - 15)e^{3x} dx.$$

Prin integrare obținem

$$y^3 = 3\int x^2 e^{3x} dx - 7\int x e^{3x} dx - 15\int e^{3x} dx + C,$$

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}, \int x e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x},$$

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right)e^{3x},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$y^3 = e^{3x}\left(x^3 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} - \frac{7}{3}x + \frac{7}{9} - 5\right) = (x^3 - 3x - 4)e^{3x} + C$$

sau

$$y^3 = (x + 1)(x - 4)e^{3x} + C, \quad x \in R.$$

2) Pentru $x = 4$ trebuie să avem $y = 0$ de unde rezultă că $C = 0$. Soluția particulară căutată este

$$y = \sqrt[3]{(x + 1)(x - 4)}e^x,$$

cu mulțimea de definiție R.

3) Avem

$$f(x) = \sqrt[3]{(x + 1)(x - 4)}e^x, x \in R,$$

$$f(x) = 0, \ x_1 = -1, \ x_2 = 4;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Graficul admite asimptota orizontală $y = 0$. Graficul nu are asimptote verticale și nici asimptote oblice.

$$f'(x) = \left[\sqrt[3]{(x + 1)(x - 4)} + \frac{1}{3}\frac{2x - 3}{\sqrt[3]{(x + 1)^2(x - 4)^2}}\right]e^x,$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 7x - 15}{3\sqrt[3]{[(x - 1)(x + 4)]^2}}e^x, \ x \in R - \{-1, 4\};$$

f nu este derivabilă în punctele $x_1 = -1$ și $x_2 = 4$.

$$f'(x) = 0, \ x_1' = \frac{1}{6}(7 - \sqrt{229}), \ x_2' = \frac{1}{6}(7 + \sqrt{229}),$$

$$\lim_{x \to -1} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 4} f'(x) = +\infty.$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$		$\frac{7 - \sqrt{229}}{6}$		-1		0		$\frac{7 + \sqrt{229}}{6}$		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\underset{A}{\sqrt[3]{\frac{16}{9}}e^{-\frac{4}{3}}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$\underset{B}{-\sqrt[3]{\frac{14}{9}}e^{\frac{22}{6}}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{7 - \sqrt{229}}{6}\right) \cong \sqrt[3]{\frac{16}{9}}e^{-\frac{4}{3}}, \ f\left(\frac{7 + \sqrt{229}}{6}\right) \cong -\sqrt[3]{\frac{14}{9}}e^{\frac{22}{6}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

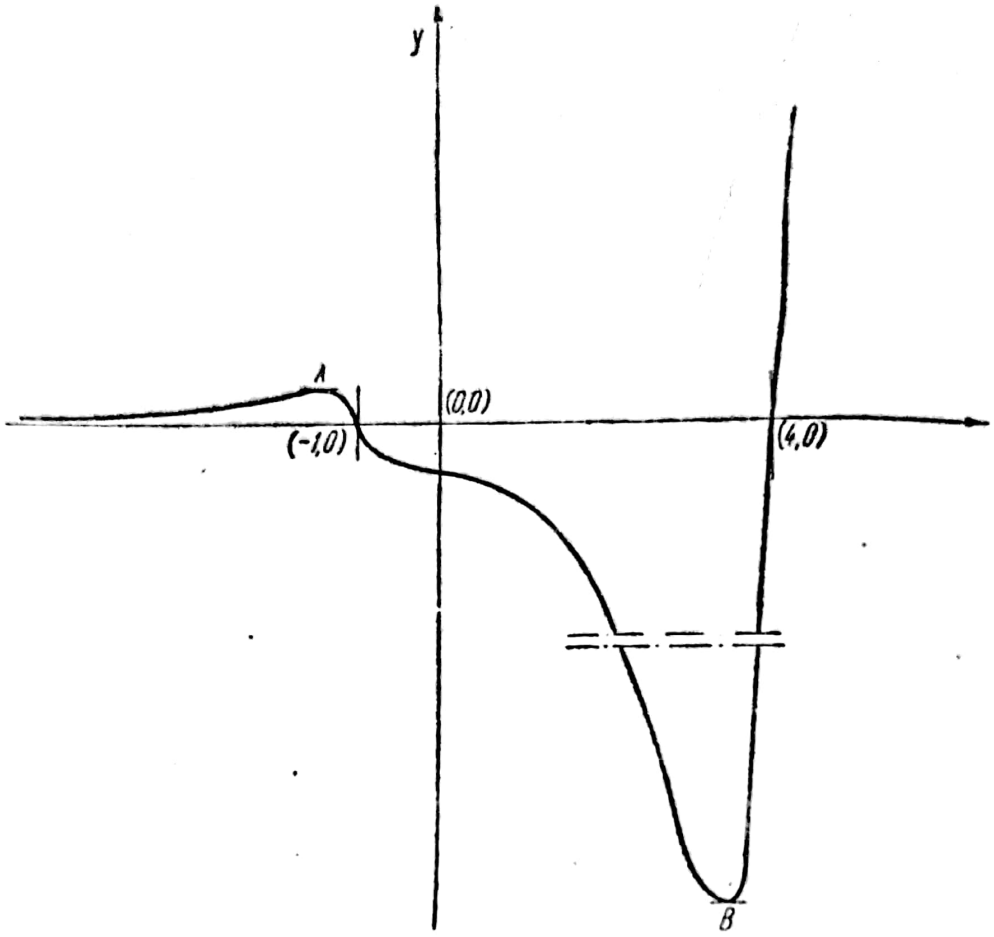


Fig. 81

Graficul este dat în figura 81. Pentru ordonate s-a luat altă scară.

35. Se consideră două semidrepte perpendiculare Ox și Oy.

Pe Oy se dau două puncte fixe A și B și se notează $OA = a$, $OB = b$. Fie M un punct variabil pe Ox. Se cere:

1) Să se exprime $\theta = \sphericalangle AMB$ în funcție de $x = OM$ și să se determine poziția M_0 a punctului M pentru care θ este maxim. Ținînd seamă de expresia lui x pentru care θ este maxim, să se arate cum poate fi determinat cu rigla și compasul punctul M_0.

2) Ce relații există între a și b în cazul cînd valoarea maximă a lui θ este $\frac{\pi}{6}$?

3) Exprimînd valoarea maximă θ_0 a lui θ, ca o funcţie de $\lambda = \frac{b}{a}$, să se arate că această funcţie este monotonă.

1969, Institutul Politehnic, Bucureşti.

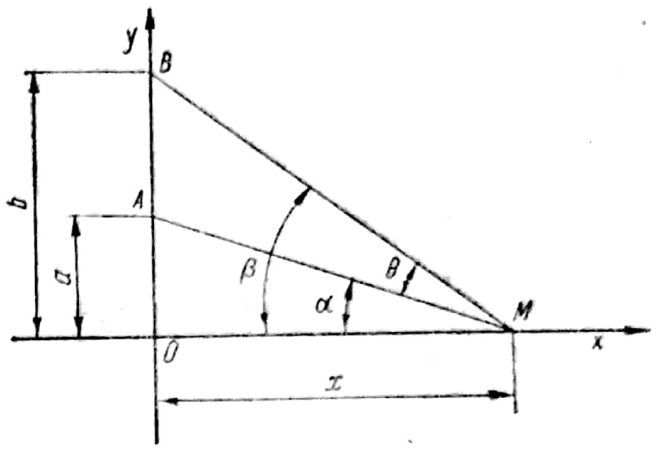


Fig. 82

R. 1) Conform figurii 82 avem notaţiile

$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle OMA$, $\sphericalangle \beta = \sphericalangle OMB$ iar unghiul θ este dat de diferenţa

$$\theta = \beta - \alpha.$$

Avem însă

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{x}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{x}, \quad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

deci

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}} = \frac{bx - ax}{x^2 + ab},$$

iar

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{(b-a)x}{x^2 + ab}, \qquad x \in [0, +\infty).$$

Punctul de maxim al lui θ se obţine anulind derivata în raport cu x a lui θ. Avem

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1 + \frac{(b-a)^2 x^2}{(x^2 + ab)^2}} \cdot \frac{(b-a)(x^2 + ab) - 2x^2(b-a)}{(x^2 + ab)^2},$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{(b-a)(ab - x^2)}{(x^2 + ab)^2 + (b-a)^2 x^2}, \qquad x \in [0, \infty),$$

$$\frac{d\theta}{dx} = 0, \qquad x^2 = ab, \qquad x = \sqrt{ab} > 0.$$

Tabloul de variaţie

x	0						$\sqrt{ab}$						$+\infty$
$\frac{d\theta}{dx}$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
θ	0		$\nearrow$				$\operatorname{Arctg} \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$ maximum		$\searrow$				0

Scanned with OKEN Scanner

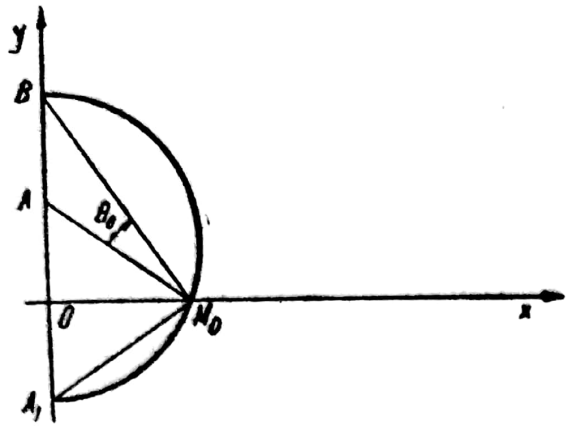


Fig. 83

În punctul $x = \sqrt{ab}$, θ are un maxim θ_0 dat de $\theta_0 = \operatorname{Arctg} \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$.

Construcția grafică a lui θ_0. Fie A_1 simetricul lui A față de O. Cercul de diametru A_1B taie ax OX, $x > 0$ în punctul M_0 (fig. 83) și $\sphericalangle \theta_0 = \sphericalangle AM_0B$.

În adevăr avem $OA = OA_1$, deci din triunghiul dreptunghic A_1M_0B obținem

$$OM_0^2 = OA_1 \cdot OB = OA \cdot OB = ab.$$

Dacă punem $OM_0 = x_0$, rezultă imediat $x_0 = \sqrt{ab}$ și unghiul AM_0B este θ maxim.

2) Avem

$$\theta_0 = \operatorname{Arctg} \frac{b-a}{2\sqrt{ab}},$$

pentru $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, rezultă

$$\frac{b-a}{2\sqrt{ab}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}, \quad \frac{b-a}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$3(b-a)^2 = 4ab, \quad 3b^2 - 10ab + 3a^2 = 0,$$

care dă

$$a = \frac{5b \pm \sqrt{25b^2 - 9b^2}}{3} = \begin{cases} 3b \\ \frac{b}{3}. \end{cases}$$

și pentru că $a < b$, rezultă unica soluție $a = \frac{b}{3}$ sau $b = 3a$.

3) Avem

$$\theta_0 = \operatorname{Arctg} \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}, \qquad \lambda = \frac{b}{a},$$

deci

$$\theta_0 = \operatorname{Arctg} \frac{\lambda - 1}{2\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \in (0, \infty),$$

$$\frac{d\theta_0}{d\lambda} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda-1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2} \cdot \frac{2\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\lambda - 1)}{4\lambda},$$

sau

$$\frac{d\theta_0}{d\lambda} = \frac{4\lambda}{4\lambda + (\lambda - 1)^2} \cdot \frac{2\lambda - (\lambda - 1)}{4\lambda\sqrt{\lambda}},$$

$$\frac{d\theta_0}{d\lambda} = \frac{\lambda + 1}{(\lambda + 1)^2\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{(\lambda + 1)\sqrt{\lambda}} > 0, \quad \lambda \in (0, \infty);$$

derivata $\theta_0'(\lambda)$ este strict pozitivă pe $(0, \infty)$; rezultă că $\theta_0(\lambda)$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

36. Fie M un punct oarecare pe semicercul de diametru $AB = 2R$. Din acest punct se duce perpendiculara MC pe AB și perpendiculara MD pe tangenta dusă în punctul B la cerc.

1) Să se exprime în funcție de raza R și distanța $AC = x$ volumul V al corpului obținut prin rotirea trapezului $AMDB$ în jurul diametrului AB.

2) Considerînd $R = 1$, să se determine valorile lui x pentru care funcția $f(x) = 1{,}5\ V$ are extreme.

1969. Institutul Politehnic, Brașov.

R. 1) Conform figurii 84 avem

$$MC = DB = \sqrt{x(2R - x)},$$

$$MD = BC = 2R - x.$$

Volumul V obținut prin rotația trapezului $ABMD$ în jurul lui AB este

$$V = V_1 + V_2,$$

unde $V_1 = \pi BD^2 \cdot MD$ este volumul cilindrului obținut prin rotația dreptunghiului $BCMD$ în jurul lui AB, iar $V_2 = \frac{1}{3}\pi x\, MC^2$ este volumul conului obținut prin rotația triunghiului ACM în jurul lui AB.

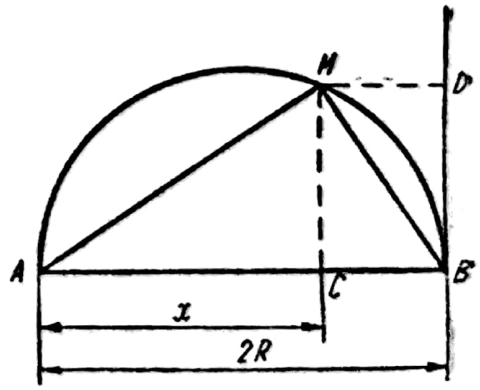


Fig. 84

Obținem: $V(x) = \pi x(2R - x)^2 + \frac{\pi}{3}x^2(2R - x)$.

2) Mulțimea de definiție a funcției V este $[0, 2R]$.

Avem

$$f(x) = \frac{3}{2}\pi x(2R - x)^2 + \frac{\pi}{2}x^2(2R - x),$$

Scanned with OKEN Scanner

funcția f are aceeași mulțime de definiție ca și V, care este și mulțimea de continuitate și de derivabilitate. Calculăm derivatele $f'(x)$ și $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\pi[(2R - x)^2 - 2x(2R - x)] + \frac{\pi}{2}2x(2R - x) - \frac{\pi}{2}x^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2}(12R^2 - 12Rx + 3x^2 - 12Rx + 6x^2 + 4xR - 2x^2 - x^2) = \frac{\pi}{2}(6x^2 - 20Rx + 12R^2),$$

$$f'(x) = 0, \qquad 3x^2 - 10Rx + 6R^2 = 0,$$

$$x_1 = \frac{1}{3}(5 - \sqrt{7})R, \quad x_2 = \frac{1}{3}(5 + \sqrt{7})R > 2R,$$

singura soluție acceptabilă este x_1 deoarece este situată în $[0, 2R]$.

$$f''(x) = \pi(6x - 10R),$$

$$f''(x_1) = \pi(10 - 2\sqrt{7} - 10)R < 0.$$

Rezultă că pentru $x_1 = \frac{1}{3}(5 - \sqrt{7})R$, V are un maxim dat de

$$V(x_1) = \frac{3}{2}\pi\frac{1}{3}(5 - \sqrt{7})\left(2 - \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 R^3 +$$

$$+ \frac{\pi}{2}\frac{1}{9}(5 - \sqrt{7})^2\left(2 - \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\right)R^3;$$

considerînd $R = 1$, se obține,

$$V(x_1) = \frac{\pi}{27}(5 - \sqrt{7})(1 + \sqrt{7})(4 + \sqrt{7}).$$

37. Se dă ecuația diferențială

$$(1 - x^2)\,dy = 2\,e^{-y}\,dx, \quad x^2 \neq 1$$

și se cere:

1) să se găsească soluția generală;

2) să se determine soluția particulară care îndeplinește condiția $y(0) = 0$;

3) să se studieze variația și să se reprezinte grafic soluția particulară găsită la punctul 2.

R. 1) Se separă variabilele

$$e^y dy = 2\frac{dx}{1 - x^2}, \quad x^2 \neq 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$e^y = 2\int \frac{dx}{1-x^2} = +\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x-1},$$

$$e^y = \ln\left|C\,\frac{x+1}{x-1}\right|.$$

2) Soluția particulară se obține din integrala generală; $x = 0$, $y = 0$, fapt ce determină pe C. Avem

$$e^0 = 1 = \ln C, \qquad C = e$$

iar soluția particulară căutată este

$$e^y = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + 1,$$

sau

$$f(x) = \ln\left[\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + 1\right].$$

3) Funcția $f(x)$ există dacă

$$\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| > -1 \quad \text{sau} \quad -\frac{1}{e} > \frac{x+1}{x-1} > \frac{1}{e}.$$

Trebuie să avem

$$(ex + e - x + 1)(x-1) > 0$$

sau

$$(ex + e + x - 1)(x-1) < 0$$

deci

$$x \in \left(-\infty, \frac{1+e}{1-e}\right) \cup \left(\frac{1-e}{1+e}, 1\right) \cup (1, +\infty)$$

care formează mulțimea de definiție.

Pe mulțimea de definiție avem

$$f'(x) = \frac{1}{\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + 1} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2},$$

sau

$$f'(x) = \frac{1}{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 1} \cdot \frac{-2}{x^2-1}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci graficul admite asimptota orizontală $y = 0$;

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1+0} f(x) = +\infty,$$

deci graficul admite asimptota verticală $x = 1$.

$$f\left(\frac{1+e}{1-e} - \varepsilon\right) = -\infty, \qquad f\left(\frac{1-e}{1+e} + \varepsilon\right) = -\infty;$$

graficul mai admite asimptotele verticale $x = \frac{1+e}{1-e}$, $x = \frac{1-e}{1+e}$.

Tabloul de variație

x	$-\infty$		$\frac{1+e}{1-e}$		-1		$\frac{1-e}{1+e}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$		////	////		$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$		////	////		$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\searrow$	0

Graficul este dat în figura 85.
În origine graficul are tangenta $y = 2x$.

Observație: **Soluția de la pct. 2 este definită pe $\left(\frac{1-e}{1+e}, 1\right)$. La pct. 3 s-a studiat variația și s-a reprezentat grafic extensiunea funcției la R.**

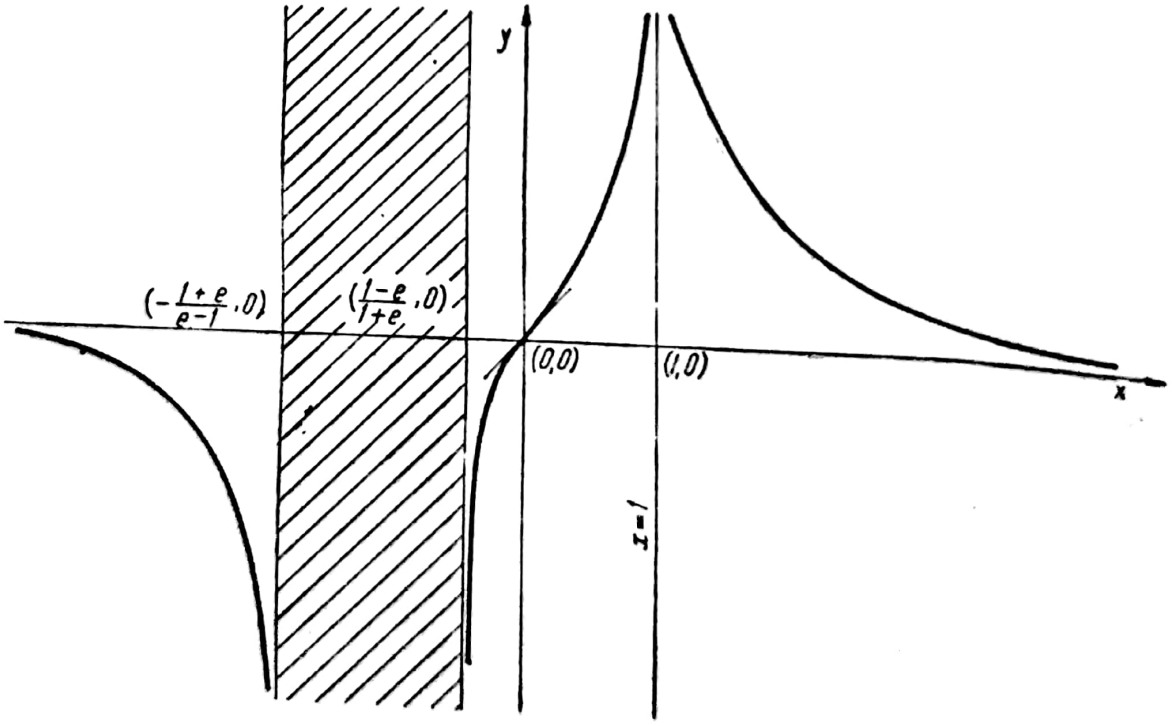


Fig. 85

Scanned with OKEN Scanner

38. Se consideră funcţia

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x^2-5x-2}, \quad 3x^2-5x-2 \neq 0.$$

1) Să se studieze variaţia acestei funcţii.
2) Să se studieze natura şi semnul rădăcinilor reale ale ecuaţiei

$$3yx^2 - (5y+2)\,x + 1 - 2y = 0,$$

unde y este un parametru real.
3) Să se discute şi să se rezolve ecuaţia

$$3y\sin^2 t - (5y+2)\sin t + 1 - 2y = 0,$$

y avînd semnificaţia de la punctul 2).

1969. Institutul Politehnic, Iaşi.

R. Rădăcinile numitorului funcţiei raţionale $f(x)$ ne dau punctele în care $f(x)$ nu este definită:

$$3x^2-5x-2=0, \quad x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = 2;$$

mulţimea de definiţie a lui f este $R - \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}$ care este şi mulţimea de continuitate şi de derivabilitate de orice ordin.

$$f(x) = 0, \quad x_1' = \frac{1}{2}.$$

Graficul admite asimptotele verticale $x = -\frac{1}{3}$ şi $x = 2$ şi asimptota orizontală $y = 0$ deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{2(3x^2-5x-2)-(6x-5)(2x-1)}{(3x^2-5x-2)^2} = \frac{-6x^2+6x-9}{(3x^2-5x-2)^2},$$

$$f'(x) = 0, \; +2x^2-2x+3=0, \; x_1' = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{5}), \; x_2'' = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{5}),$$

deci $f(x)$ nu are extreme relative; $f'(x) < 0$ pe mulţimea de definiţie.

Tabloul de variaţie

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ 0

Scanned with OKEN Scanner

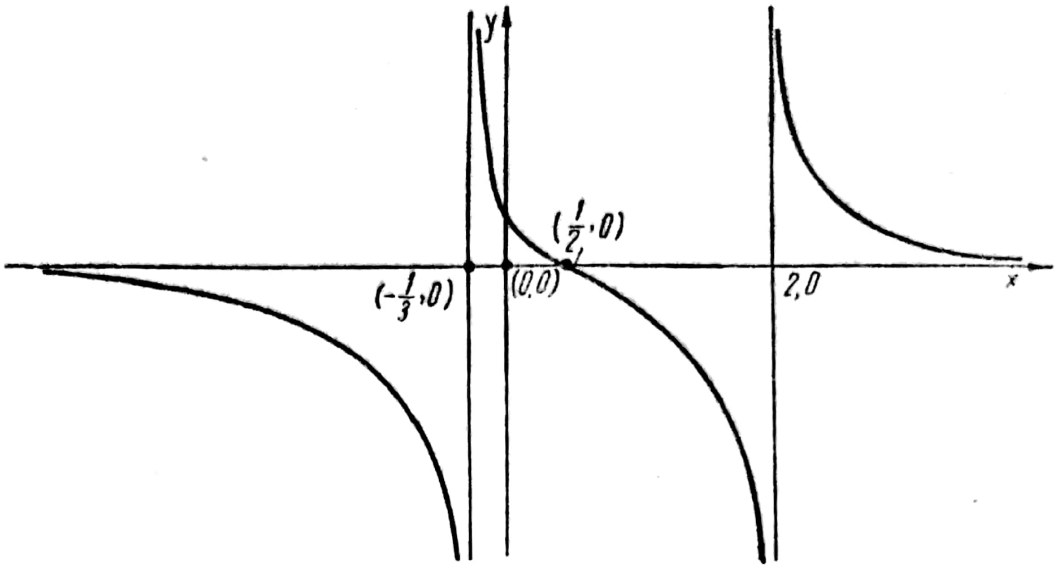


Fig. 86

Avem

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}-0} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{3}-0} \frac{2x-1}{(3x+1)(x-2)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{2x-1}{(3x+1)(x-2)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = +\infty.$$

Graficul este dat în figura 86.

2) Putem folosi reprezentarea grafică pentru discuția de la punctul 2. În adevăr, punînd în evidență pe y putem scrie

$$y = \frac{2x-1}{3x^2-5x-2},$$

deci dacă intersectăm graficul cu dreapta variabilă $y = \lambda$ obținem discuția cerută. Dacă

a) $-\infty < \lambda < 0$, ecuația are două rădăcini reale

$$x_1 < -\frac{1}{3} \quad \text{și} \quad \frac{1}{2} < x_2 < 2,$$

cînd $\lambda \to 0-$, $x_1 \to -\infty$ și $x_2 \to \frac{1}{2}$.

b) $0 < \lambda < +\infty$, ecuația are două rădăcini reale

$$-\frac{1}{3} < x_1 < \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad x_2 > 2,$$

cînd $\lambda \to 0+$, $x_1 \to \frac{1}{2}$, $x_2 \to +\infty$.

Din discuție rezultă că ecuația dată are pentru orice $\lambda \neq 0$ două rădăcini reale. Să verificăm acest fapt.

$$\Delta = (5y + 2)^2 - 4 \cdot 3y(1 - 2y) = 49y^2 + 8y + 4,$$
$$\Delta = 0,\ 49y^2 + 8y + 4 = 0,\ \Delta' = 64 - 16 \cdot 49 < 0,$$

deci $\Delta > 0$ pentru $y \in R$, și ecuația admite rădăcini reale oricare ar fi $y \in R$. Cînd $\lambda = 0$ ecuația se reduce la $-2x + 1 = 0$ deci $x = \frac{1}{2}$.

3) Avem, din relația de la punctul 3,

$$y = \frac{2 \sin t - 1}{3 \sin^2 t - 5 \sin t - 2}$$

deci variația lui y este dată în tabloul de variație de la punctul 1, unde însă ținem seama că $\sin t$, care înlocuiește pe x, variază numai între -1 și $+1$.

Pentru $\sin t = -1$, obținem

$$y_1 = \frac{-3}{3 + 5 - 2} = -\frac{1}{2},$$

deci pentru $-\infty < y \leqslant -\frac{1}{2}$ ecuația dată are o singură soluție $-1 \leqslant \sin t \leqslant -\frac{1}{3}$ care determină pe t.

Pentru $\sin t = 1$, avem

$$y_2 = \frac{2 - 1}{3 - 5 - 2} = -\frac{1}{4},$$

prin urmare pentru $-\frac{1}{4} \leqslant y < +\infty$, ecuația dată are o singură soluție $-\frac{1}{3} < \sin t \leqslant +1$, care determină pe t.

Din discuție rezultă că pentru $y \in \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ ecuația dată nu are soluții.

39. Se dă

$$f(x) = \sqrt{(x - 1)(x + 3)}\, e^{-x}$$

și se cere

1) să se stabilească mulțimile de definiție, de continuitate și de derivabilitate;

2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;

3) să se calculeze

$$F(a) = \int_1^a f^2(x)\, dx,$$

apoi să se calculeze $\lim_{a \to \infty} F(a)$.

R. Funcția $f(x)$ este definită pentru punctele pentru care $(x-1)(x+3) \geqslant 0$ care dă mulțimea $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

Funcția f este continuă pe $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$; în punctul -3 este continuă la stînga iar în punctul 1 este continuă la dreapta. Mulțimea de derivabilitate este mulțimea de continuitate.

$$f'(x) = \left[-\sqrt{(x-1)(x+3)} + \frac{x+3+x-1}{2\sqrt{(x-1)(x+3)}}\right] e^{-x},$$

sau

$$f'(x) = \frac{x+1-(x-1)(x+3)}{\sqrt{(x-1)(x+3)}} e^{-x} = \frac{-x^2-x+4}{\sqrt{(x-1)(x+3)}} e^{-x};$$

$f'(x)$ este finită pe $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$. Avem

$$f'(1+0) = +\infty, \quad f'(-3-0) = +\infty.$$

2) $$f(x) = 0, \qquad x_1 = -3, \qquad x_2 = 1;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Graficul admite asimptota orizontală $y = 0$.

Asimptote oblice

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{(x-1)(x+3)}\, e^{-x}}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{(x-1)(x+3)}}{x} e^{-x} = -\infty$$

deci nu are asimptote oblice.

$$f'(x) = \frac{-x^2-x+4}{\sqrt{(x-1)(x+3)}} e^{-x},$$

$$f'(x) = 0, \; x^2+x-4 = 0, \; x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}, \; x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}.$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$		-3		x_1		0		$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0				0	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	

$$f(x_2) = \left[\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}\right)\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}}.$$

Graficul este dat în figura 87.

Scanned with OKEN Scanner

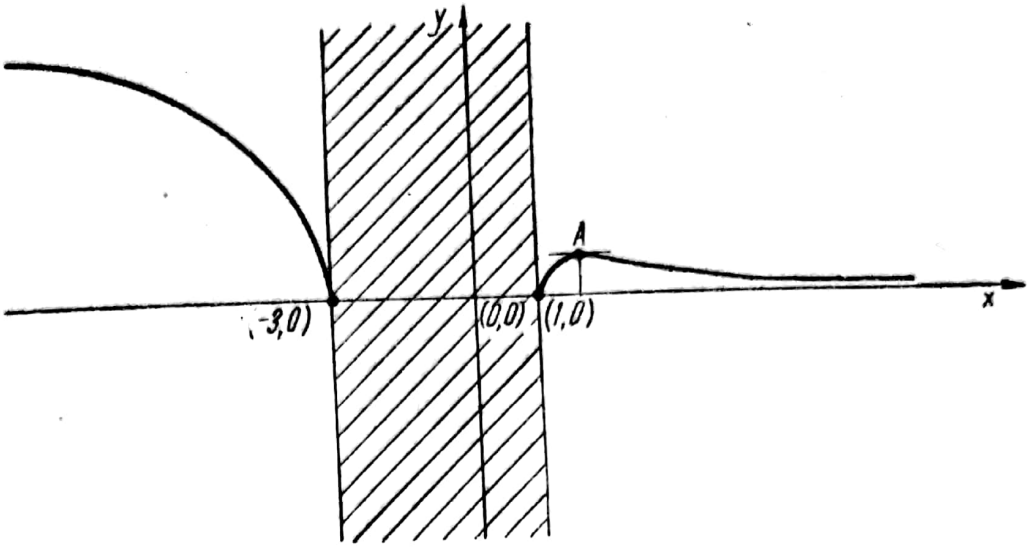


Fig. 87

3) Avem

$$f^2(x) = (x-1)(x+3)e^{-2x},$$

deci

$$F(a) = \int_1^a (x^2 + 2x - 3)e^{-2x}\,dx.$$

Scriem primitiva lui $(x^2 + 2x - 3)e^{-2x}$ astfel:

$$g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$$

și identificăm. Trebuie să avem

$$(-2ax^2 - 2bx - 2c + 2ax + b)e^{-2x} \equiv (x^2 + 2x - 3)e^{-2x}$$

obținem sistemul

$$-2a = 1, \quad -2b + 2a = 2, \quad b - 2c = -3,$$

cu soluția

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{3}{2}, \quad c = +\frac{3}{4},$$

deci

$$F(a) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^{-2x}\Big|_1^a =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{3}{4}\right)e^{-2a} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{-2}.$$

Deoarece $\lim_{a\to\infty} a^p e^{-2a} = 0$, rezultă că $\lim_{a\to\infty} F(a) = \frac{5}{4}e^{-2}$.

Scanned with OKEN Scanner

40. Se consideră funcţiile

$$f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}, \qquad g(x) = \sqrt{x - 1}$$

şi se cere:

1) să se construiască graficul (C) al funcţii $f(x)$ şi graficul (C_1) a funcţiei $g(x)$ pentru $x \geqslant 1$, folosind aceleaşi axe Ox şi Oy;

2) un punct M de pe (C) se preciectează în P pe Ox şi în Q pe Oy; analog un punct M_1 de pe curba (C_1) se proiectează pe Ox şi Oy în P_1 respectiv Q_1; să se arate că fiecărui punct M de pe curba (C) îi corespunde un singur punct M_1 pe (C_1) pentru care există relaţiile

$$\text{aria } OPMQ = \text{aria } OP_1M_1Q_1, \quad (\alpha);$$

3) cele două curbe (C), (C_1) au un punct comun situat pe axa Ox. Dacă M şi M_1 corespund condiţiei (α) să se arate că aria mărginită de segmentele AP_1 şi P_1M_1 şi de curba (C_1) este egală cu dublul ariei mărginite de segmentele AP, PM şi de curba (C).

1969. Institutul Politehnic, Bucureşti.

R. 1) a) Mulţimea de definiţie a lui f este $R - (-1, +1)$.

$f(x) = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = +1.$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$f'(x) = 0, \; x_1' = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \; x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}$; valorile care anulează derivata nu se găsesc în intervalul $[1, +\infty)$.

$$f''(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x(2x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^{3/2}} = \frac{2x^3 - 3x}{(x^2 - 1)^{3/2}},$$

$$f''(x) = 0, \; x_1'' = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1.$$

Tabloul de variaţie pentru $f(x)$

x	1							$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0			$\nearrow$				$+\infty$

în punctul $x = 1 + 0$, $f'(1 + 0) = +\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

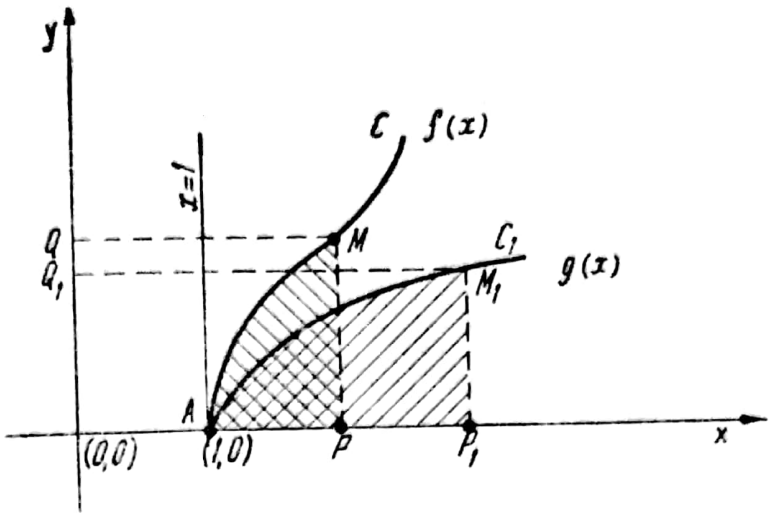


Fig. 88

b) Mulțimea de definiție a lui $g(x)$ este $[1, +\infty)$.

$g(x) = 0, \quad x_1 = 1, \quad g(x) \geqslant 0$ pe $[1, +\infty)$,

$$g'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \; g'(x) > 0, \; x \in [1, +\infty),$$

în punctul $x = 1 + 0$, $g'(1 + 0) = +\infty$.

Tabloul de variație pentru $g(x)$

x	1					$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	0	$\nearrow$				$+\infty$

Graficele celor două funcții sînt date în figura 88.
Pe $(1, +\infty)$ avem $f(x) > g(x)$. În adevăr

$x\sqrt{x^2-1} = x\sqrt{(x+1)(x-1)} > \sqrt{x-1}$ pentru orice $x \in (1, \infty)$ deoarece $x\sqrt{x+1} > 1$ pentru $x \in (1, \infty)$.

2) Dacă M este un punct pe (C) de coordonate $(a, f(a))$ sau $(a, a\sqrt{a^2-1})$, $a > 1$ punctul M_1 de pe (C_1) va avea coordonatele $(\lambda, \sqrt{\lambda-1})$. Condiția

$$\text{aria } OPMQ = \text{aria } OP_1M_1Q_1$$

ne dă

$$a^2\sqrt{a^2-1} = \lambda\sqrt{\lambda-1}$$

care are soluția $\lambda = a^2$. Să arătăm că ecuația

$$\lambda\sqrt{\lambda-1} = a^2\sqrt{a^2-1}$$

Scanned with OKEN Scanner

nu mai are altă soluție $\lambda > 1$. Ridicăm la pătrat și obținem

$$\lambda^2(\lambda - 1) = a^4(a^2 - 1),$$

$$h(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - a^6 + a^4 = 0,$$

$$h'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda, \quad h'(\lambda) = 0, \quad \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = \frac{2}{3}.$$

Formăm șirul lui Rolle

$h(-\infty)$	$h(0)$	$h\left(\frac{2}{3}\right)$	$h(+\infty)$
$-\infty$	$-$	$-\frac{4}{27} + a^4 - a^6$	$+$

Pentru $a > 1$, $h(\lambda)$ admite o singură rădăcină reală $> \frac{2}{3}$ deoarece $h(1) = -a^6 + a^4 < 0$ rezultă că are o singură rădăcină reală > 1.

3) Am văzut că $f(1) = g(1) = 0$ și $f(x) > g(x)$ pentru $x > 1$, deci graficele au un singur punct comun $A(1, 0)$;

$$\text{aria } APM = \int_1^a x\sqrt{x^2 - 1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^a \sqrt{x^2 - 1}\,d(x^2 - 1),$$

$$\text{aria } APM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^a = \frac{1}{3}(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}},$$

$$\text{aria } AP_1M_1 = \int_1^{a^2} \sqrt{x - 1}\,dx = \frac{2}{3}(x - 1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{a^2} = \frac{2}{3}(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}.$$

Avem

$$\text{aria } AP_1M_1 = 2 \text{ aria } APM.$$

41. Se dă

$$f(x) = 2\ln(x^4 - 3x^2 + 2) + x^2 + 1$$

și se cere:

1) să se determine mulțimile de definiție, de continuitate și de derivabilitate;

2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;

3) să se calculeze aria domeniului plan mărginit de grafic, axa Ox și dreptele

$$x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{2}.$$

R. 1) Funcția este definită în punctele pentru care $x^4 - 3x^2 + 2 > 0$. Avem $x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$ pentru $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = +\sqrt{2}$ deci mulțimea de definiție este

$$(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, +1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

care este și mulțimea de continuitate și derivabilitate.

2) $f(x) = 0$, numărul soluțiilor cît și intervalele în care se găsesc vor rezulta din grafic.

Asimptote verticale $x = -\sqrt{2}$, $x = -1$, $x = +1$, $x = \sqrt{2}$,

$$f'(x) = \frac{2(4x^3 - 6x)}{x^4 - 3x^2 + 2} + 2x = \frac{2x(x^4 - x^2 - 4)}{x^4 - 3x^2 + 2},$$

$$f'(x) = 0, \quad x_1' = 0, \quad x_2' = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}}, \quad x_3' = -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}}.$$

Avem $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}+0} f(x) = -\infty$.

Tabloul de variație

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	x_1'	-1	0	$+1$	x_2'	$+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -$	∄		$+\ +\ +\ 0\ -\ -\ -$		∄		$+\ +\ +$	
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	∄		$-\infty \nearrow \ln 4 + 1 \searrow -\infty$		∄		$-\infty \nearrow +\infty$	

Graficul este dat în figura 89.

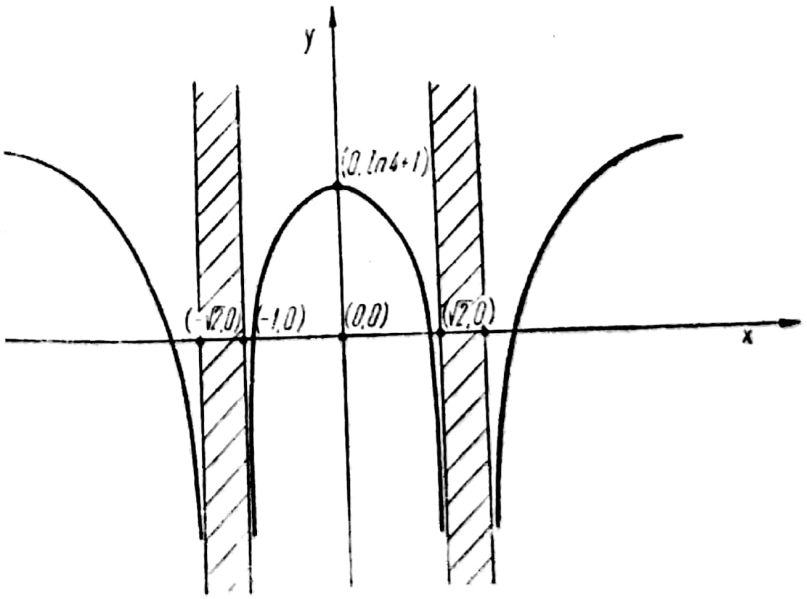


Fig. 89

Din grafic rezultă că ecuația

$$2\ln(x^4 - 3x^2 + 2) + x^2 + 1 = 0$$

are patru rădăcini reale $\xi_1 < -\sqrt{2}$, $\xi_2 \in (-1, 0)$, $\xi_3 \in (0, 1)$ și $\xi_4 > \sqrt{2}$.

Graficul este simetic față de axa Oy deoarece $f(x)$ este o funcție pară.

3) Din motive de **simetrie aria cerută este dată de**

$$\mathcal{A} = 2\int_0^{\frac{1}{2}} [2\ln(x^4 - 3x^2 + 2) + x^2 + 1]\,dx,$$

deci

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2,$$

unde $\mathcal{A}_2 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)\,dx = 2\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} + 1 = \frac{13}{12}$;

pe

$$\mathcal{A}_1 = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(x^4 - 3x^2 + 2)dx$$

o integrăm prin părți; $u = \ln(x^4 - 3x^2 + 2)$, $dv = dx$,

$$v = x, \quad du = \frac{4x^3 - 6x}{x^4 - 3x^2 + 2}\,dx,$$

$$\mathcal{A}_1 = 4x\ln(x^4 - 3x^2 + 2)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(2x^2 - 6)d(x^2)}{x^4 - 3x^2 + 2}.$$

În integrala a doua din partea a doua punem $x^2 = t$,

$$-4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(2x^2 - 6)d(x^2)}{x^4 - 3x^2 + 2} = -4\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{(2t - 6)dt}{t^2 - 3t + 2}.$$

Avem

$$\frac{2t - 6}{t^2 - 3t + 2} = \frac{4}{t - 1} - \frac{2}{t - 2}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$-4\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{(2t-6)dt}{t^2-3t+2}=-16\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{dt}{t-1}+8\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{dt}{t-2}=$$

$$=-16\ln|t-1|\Big|_0^{\frac{1}{4}}+8\ln|t-2|\Big|_0^{\frac{1}{4}}=-16\ln\frac{3}{4}+8\ln\frac{7}{8},$$

de unde rezultă

$$\mathcal{A}=\frac{13}{12}+2\ln\frac{21}{16}-16\ln\frac{3}{4}+8\ln\frac{7}{8}.$$

42. Se dă funcţia

$$F(x)=-\int\frac{x^2-x+2}{(x-1)^2(x+1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}dx,\quad x\geqslant\frac{3}{2}$$

şi se cere:

1) să se găsească primitiva $f(x)$ care pentru $x=2$ ia valoarea $\frac{1}{3}e$;

2) să se determine pentru primitiva astfel obţinută mulţimea maximă de definiţie, iar în punctele în care nu este definită, limitele la dreapta şi la stînga;

3) să se studieze variaţia lui f şi să se reprezinte grafic;

4) să se găsească marginile superioară şi inferioară ale derivatei lui $f(x)$ pe intervalul $(0, 1)$.

R. 1) Putem scrie

$$\frac{x^2-x+2}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}$$

sau

$$-\frac{x^2-x+2}{(x-1)^2(x+1)^2}dx=d\left(\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{x+1}d\left(\frac{1}{x-1}\right),$$

de unde

$$-\frac{x^2-x+2}{(x-1)^2(x+1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}dx=d\left[\frac{1}{x+1}e^{\frac{1}{x-1}}\right],$$

Scanned with OKEN Scanner

prin urmare

$$F(x) = \int \mathrm{d}\left[\frac{1}{x+1}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\right] = \frac{1}{x+1}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} + C;$$

pentru $x = 2$ avem

$$F(2) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e} + C,$$

deci $C = 0$, iar primitiva particulară cerută la puncul 1 este

$$f(x) = \frac{1}{x+1}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}, \quad x \geqslant \frac{3}{2}.$$

2) Mulțimea maximă de definiție este $R - \{-1, +1\}$, care este și mulțimea de continuitate și derivabilitate.

Avem

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1+0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1}} = 0,$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x-1} \cdot \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{1}{x-1}} = +\infty,$$

deoarece $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$ și $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

3) Graficul admite asimptotele verticale $x = -1$ și $x = +1$ cît și asimptota orizontală $y = 0$.

Avem

$$f'(x) = -\frac{x^2 - x + 2}{(x-1)^2(x+1)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}},$$

sau

$$f'(x) = -\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}},$$

deci $f'(x) < 0$ pe mulțimea de definiție.

Tabloul de variație

x	$-\infty$			-1			0			$+1$			$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$+\infty$	$\searrow$			0

În punctul $x = 1$ avem $f'(1 - 0) = 0$.

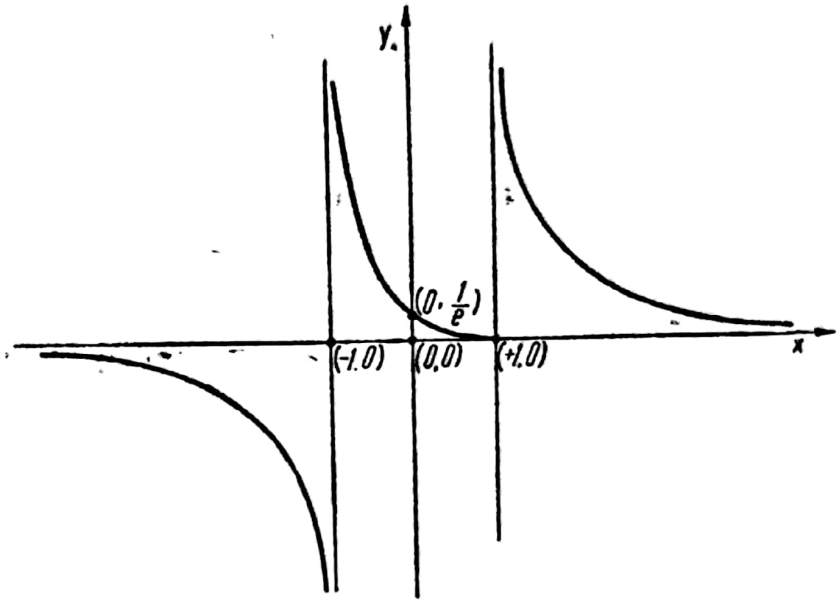


Fig. 90

Graficul este dat în figura 90. Pentru a avea graficul lui $f(x)$ definită la pct.1, este suficientă să considerăm în figura 90, $x \geqslant \frac{3}{2}$.

4) Avem $f'(x) < 0$ pe $(0, 1)$ și $f'(1 - 0) = 0$ deci marginea superioară a lui $f'(x)$ pe $(0, 1)$ este 0.

Pe $f'(x)$ îl putem scrie astfel

$$f'(x) = -\left[\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)(x-1)^2}\right] e^{\frac{1}{x-1}},$$

deci

$$f''(x) = \left[\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^2(x-1)^2}\right] e^{\frac{1}{x-1}} +$$

$$+\left[\frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x+1)(x-1)^3} + \frac{1}{(x+1)(x-1)^4}\right] e^{\frac{1}{x-1}},$$

de unde

$$f''(x) > 0 \text{ pe } (0,\ 1);$$

în adevăr putem scrie

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} e^{\frac{1}{x-1}} + \frac{1}{(x+1)^3 (x-1)^4} [2(x-1)^2 + 2(x^2-1) + x + 1]\, e^{\frac{1}{x-1}},$$

şi $f''(x) > 0$ pe $(0,\ 1)$ dacă,

$$2(x-1)^2 + 2(x-1) + x + 1 > 0.$$

Avem:

$$2(x-1)^2 + 2(x^2-1) + x + 1 = 4x^2 - 3x + 1 = \left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0.$$

De aici rezultă că $f'(x)$ este strict crescătoare pe $(0,\ 1)$, prin urmare marginea sa inferioară este limita la dreapta în punctul 0, anume:

$$f'_{(0+)} = f'_{(0)} = \frac{-2}{e}.$$

43. Se dă ecuaţia diferenţială

$$27y' + \left[6x + 7 - \frac{28}{(3x+2)^2}\right] \cdot y^4 = 0$$

şi se cere:

1) să se integreze;

2) să se determine soluţia care îndeplineşte condiţia $y(0) = 1$;

3) să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic funcţia $y(x)$ determinată la punctul 2;

4) să se calculeze

$$\int_0^1 y^3(x)\, dx.$$

R. 1) Observăm că se pot separa variabilele. Avem

$$27 \frac{y'}{y^4} = -6x - 7 + \frac{28}{(3x+2)^2},$$

sau

$$27 \int \frac{dy}{y^4} = \int \left[-6x - 7 + \frac{28}{(3x+2)^2}\right] dx,$$

dar

$$\int \frac{dy}{y^4} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{y^3},$$

și

$$\int \left[-6x - 7 + \frac{28}{(3x+2)^2}\right] dx = -3x^2 - 7x - \frac{28}{3}\,\frac{1}{3x+2} + C',$$

deci

$$\frac{1}{y^3} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{9}x + \frac{28}{27}\,\frac{1}{3x+2} + \frac{C}{27},$$

sau

$$\frac{1}{y^3} = \frac{27(x^3+3x)^2 + 42x + 28 + C(3x+2)}{27(3x+2)}.$$

$$y = 3(3x+2)^{\frac{1}{3}}\,[27(x^3+3x^2) + (42+3C)x + 2C + 28]^{-\frac{1}{3}} \qquad (\alpha)$$

care constituie soluția generală a ecuației din enunț.

2) Soluția particulară cerută satisface condiția: $y(0) = 1$, care introdusă în soluția (α) ne dă

$$1 = \frac{3\,2^{\frac{1}{3}}}{(2C+28)^{\frac{1}{3}}} \text{ sau } 2C + 28 = 54,\quad C = 13,$$

prin urmare soluția particulară este

$$y(x) = \frac{(3x+2)^{\frac{1}{3}}}{(x^3+3x^2+3x+2)^{\frac{1}{3}}}.$$

Avem

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \equiv (x+2)(x^2+x+1),$$

deci mulțimea de definiție a lui $y(x)$ este $R - \{-2\}$.

3) $y = 0,\ x_1 = -\frac{2}{3}$;

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ 0}} y(x) = +\infty,\qquad \lim_{x\to -2+0} y(x) = -\infty.$$

Graficul admite asimptota verticală $x = -2$.

$$\lim_{x\to -\infty} y(x) = 0,\qquad \lim_{x\to +\infty} y(x) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul admite asimptota orizintală $y = 0$; nu are asimptote oblice.

$$y'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3x+2}{x^3+3x^2+3x+2}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{3(x^3+3x^2+3x+2)-(3x+2)(3x^2+6x+3)}{(x^3+3x^2+3x+2)^2},$$

$$y'(x) = \frac{-x(2x^2+5x+4)}{(3x+2)^{\frac{2}{3}}(x^3+3x^2+3x+2)^{\frac{4}{3}}},$$

$y' = 0$, $x_1 = 0$, $2x^2 + 5x + 4 = 0$ nu are soluții reale.

Tabelul de variație este

x	$-\infty$			-2			$-\frac{2}{3}$		0						$+\infty$
$y'(x)$	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$y(x)$	0	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	0	↗	1		↘					0

Graficul este dat în figura 91.

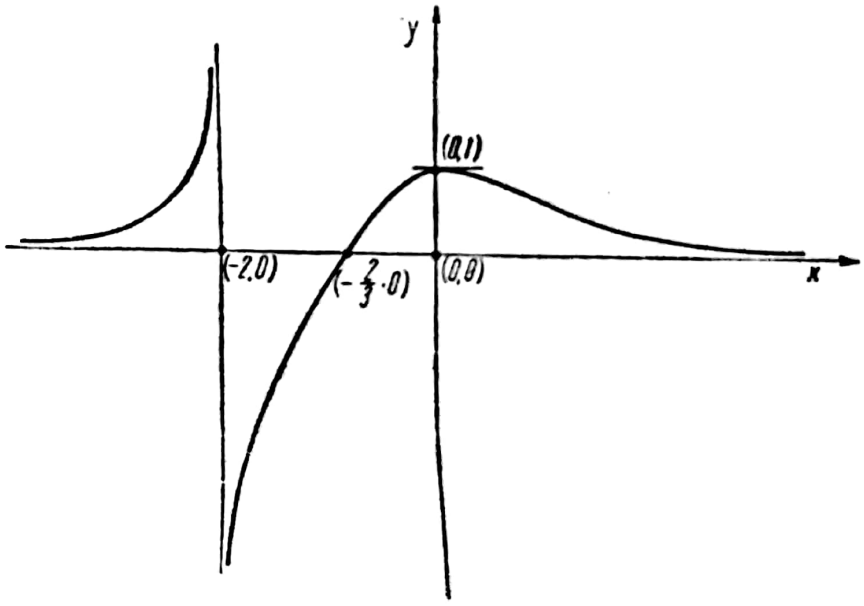


Fig. 91

4) Avem

$$y^3(x) = \frac{3x+2}{(x+2)(x^2+x+1)},$$

deci integrala cerută este

$$= \int_0^1 \frac{3x+2}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx;$$

descompunem în elemente simple funcția de integrat

$$\frac{3x+2}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1};$$

prin identificare obținem $A = -\frac{4}{3}$, $B = \frac{4}{3}$, $C = \frac{5}{3}$,

deci

$$I = -\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{4x+5}{x^2+x+1}dx,$$

$$I = -\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx,$$

$$I = -\frac{4}{3}\ln(x+2)\Big|_0^1 + \frac{2}{3}\ln(x^2+x+1)\Big|_0^1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1,$$

sau

$$I = -\frac{4}{3}\ln\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right),$$

$$I = \frac{2}{3}\ln\frac{4}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Observație : **Soluția de la pct. 2 este definită pe** $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$. **La pct. 3 s-a studiat variația și s-a reprezentat grafic extensiunea ei la** R.

44. Se dă funcția

$$f(x) = \ln[x^2 + (1+ax)^2], \quad x \in R$$

unde a este parametrul real. Se cere :

1) să se găsească extremul funcției f și să se discute natura acestui extremum după a ;

2) dacă $(h(a), g(a))$ sînt coordonatele punctelor de extremum să se arate că derivatele de ordinul n

$$h^{(n)}(a) \text{ și } g^{(n)}(a)$$

există și au forma

$$h^{(n)}(a) = \frac{P_{n+1}(a)}{(1+a^2)^{n+1}}, \qquad g^{(n)}(a) = \frac{Q_n(a)}{(1+a^2)^n}$$

unde P_{n+1}, Q_n sînt polinoame de grad cel mult $n+1$ sau n respectiv. Să se arate că $2P_n(a) \equiv Q_n(a)$.

R. 1) Funcția $f(x)$ are mulțimea de definiție R oricare ar fi parametrul real a. Funcția f este și derivabilă pe R. Avem

$$f'(x) = \frac{2x+2a(1+ax)}{x^2+(1+ax)^2}, \qquad x \in R.$$

Extremele funcției f se găsesc printre punctele care anulează pe f' $f'(x) = 0$, $x_1 = -\frac{a}{1+a^2}$.

Avem

$$f(x_1) = \ln\left[\frac{a^2}{(1+a^2)^2} + \left(1 - \frac{a^2}{1+a^2}\right)^2\right] = \ln\left(\frac{1}{1+a^2}\right);$$

$$f''(x) = \frac{2(1+a^2)[x^2 + (1+ax)^2] - [2x + 2a(1+ax)]^2}{[x^2 + (1+ax)^2]^2};$$

$f''(x_1) > 0$, deci în punctul x_1, f are un minim.

Se observă că $f''(x_1) > 0$ pentru orice $a \in R$, prin urmare punctele

$$\left(-\frac{a}{1+a^2}, \ln\frac{1}{1+a^2}\right), \quad a \in R,$$

sînt puncte de minimum pentru graficele variabile cu a.

2) Avem

$$x = -\frac{a}{1+a^2}, \qquad y = -\ln(1+a^2),$$

deci

$$h(a) = -\frac{a}{1+a^2}, \quad g(a) = -\ln(1+a^2),$$

h și g avînd derivate de orice ordin pe R. Avem

$$h'(a) = -\frac{(1+a^2) - 2a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{a^2-1}{(1+a^2)^2},$$

se vede că $h'(a) = \frac{P_2(a)}{(1+a^2)^2}$; presupunem că acest fapt este adevărat pînă la ordinul $n-1$, deci

$$h^{(n-1)}(a) = \frac{P_n(a)}{(1+a^2)^n};$$

mai derivăm o dată și obținem

$$h^{(n)}(a) = \frac{(1+a^2)P_n'(a) - n\,2a\,P_n(a)}{(1+a^2)^{n+1}}.$$

Polinomul de la numărător este cel mult de grad $n+1$, dacă P_n este cel mult de grad n; prin inducție rezultă afirmația de la pct. 2 pentru $h(a)$. Pentru $g(a)$ procedăm la fel deoarece

$$g'(a) = -\frac{2a}{1+a^2}, \quad g''(a) = 2\frac{a^2-1}{(1+a^2)^2}$$

deci $g''(a) = \frac{Q_2(a)}{(1+a^2)^2}$. Prin inducție rezultă și afirmația privitoare la $g(a)$. Deoarece

$$g'(a) = 2h(a), \qquad a \in R,$$

avem și $g^{(n+1)}(a) = 2h^{(n)}(a)$ deci

$$2P_{n+1}(a) \equiv Q_{n+1}(a), \quad a \in R.$$

Scanned with OKEN Scanner

45. Se dă funcţia $f(a)$ definită de integrala

$$f(a) = -2a^2 \int_0^1 \frac{dx}{(1 - a^2x)(1 + a^2x)}, \qquad a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

şi se cere:

1) să se găsească expresia lui $f(a)$ cît şi mulţimea maximă de definiţie a lui $f(a)$;

2) să se arate că $f(a)$ este mărginită superior; să se găsească marginea superioară;

3) să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic $y = f(a)$ pe mulţimea maximă de definiţie;

4) să se calculeze aria mulţimii plane mărginită de graficul funcţiei $f(a)$, axa Oa şi dreptele $a = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$.

R. 1) Funcţia de integrat este o fracţie raţională. Avem

$$\frac{2}{(1 - a^2x)(1 + a^2x)} = \frac{1}{1 - a^2x} + \frac{1}{1 + a^2x},$$

deci

$$f(a) = -a^2 \int_0^1 \frac{dx}{1 - a^2x} - a^2 \int_0^1 \frac{dx}{1 + a^2x},$$

$$f(a) = \left[\ln|1 - a^2x| - \ln|1 + a^2x|\right]_0^1 = \ln\left|\frac{1 - a^2}{1 + a^2}\right|, \quad a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Mulţimea maximă de definiţie este $R - \{-1, +1\}$ deoarece funcţia $\ln|x|$ nu este definită pentru $x = 0$.

2) $f(a)$ este mărginită superior dacă raportul $\frac{1 - a^2}{1 + a^2}$ este mărginit.

Avem:

$$\frac{1 - a^2}{1 + a^2} = -1 + \frac{2}{1 + a^2},$$

şi pentru că

$$0 < \frac{2}{1 + a^2} \leqslant 2,$$

rezultă că:

$$-1 < \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \leqslant 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci $\left|\frac{1-a^2}{1+a^2}\right| < 1$. Prin urmare marginea superioară a funcției $f(a)$ este zero. Funcția $f(a)$ nu este mărginită inferior pentru că $\frac{1-a^2}{1+a^2} = 0$ pentru $a_1 = +1$, $a_2 = -1$,

deci $$\lim_{a\to -1} f(a) = -\infty, \quad \lim_{a\to +1} f(a) = -\infty.$$

3) $f(a) = 0$, $\frac{1-a^2}{1+a^2} = 1$, $1 - a^2 = 1 + a^2$, $a_1' = 0$, și $\frac{1-a^2}{1+a^2} = -1$, $1 - a^2 = -1 - a^2$ (nici o soluție).

$$\lim_{a\to +\infty} f(a) = 0, \qquad \lim_{a\to -\infty} f(a) = 0.$$

Graficul admite asimptotele verticale $a = -1$, $a = +1$ și asimptota orizontală $y = 0$.

$$f'(a) = \frac{a^2+1}{a^2-1}\,\frac{+2a(1+a^2)-2a(a^2-1)}{(a^2+1)^2} = \frac{+4a}{(a^2-1)(a^2+1)}, \qquad f'(a) = 0,\ a_1'' = 0;$$

$$f''(a) = \frac{+4(a^2-1)(a^2+1)-4a^2\cdot 4a}{(a^4-1)^2} = -\frac{12a^4+4}{(a^4-1)^2};$$

$f''(a) < 0$ pe mulțimea de definiție.

Tabloul de variație

a	$-\infty$					-1			0			$+1$				$+\infty$
$f'(a)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(a)$	$-$		$-$		$-$	$-$	$-$		$-$		$-$	$-$	$-$		$-$		$-$
$f(a)$	0	$\searrow$			$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$		0	$\searrow$		$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$			0

Graficul este dat în figura 92. Pentru a avea graficul lui $f(a)$ cu $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ este suficient să considerăm în figura 92 numai acest interval.

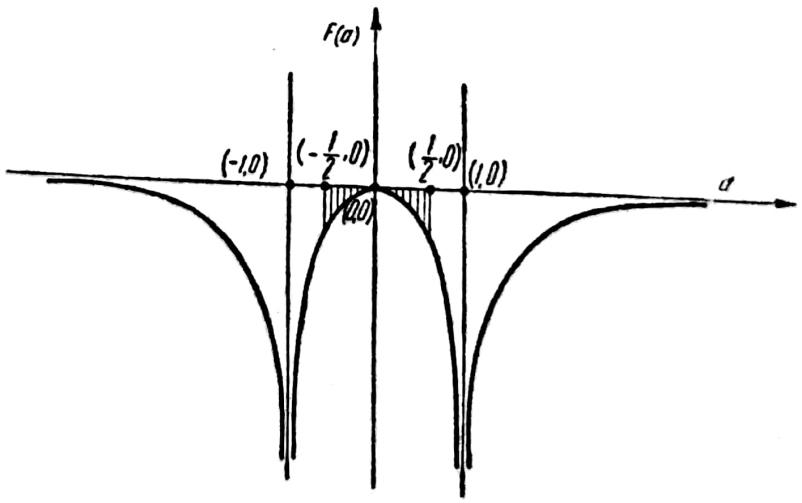


Fig. 92

4) Aria cerută este dată de integrala definită

$$\mathcal{A} = -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left|\frac{1-a^2}{1+a^2}\right| da = -2\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\frac{1-a^2}{1+a^2}\, da;$$

am luat semnul minus în fața integralei pentru a obține pentru $\mathcal{A}$ o valoare pozitivă, domeniul fiind situat sub axa Oa. Din motive de simetrie integrăm numai între 0 și $\frac{1}{2}$, dar înmulțim integrala cu 2. Integrăm prin părți

$$u = \ln\frac{1-a^2}{1+a^2}, \quad dv = da, \quad v = a, \quad du = \frac{-4a}{(1-a^2)(1+a^2)}\, da,$$

deci

$$\mathcal{A} = -2a\ln\frac{1-a^2}{1+a^2}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} - 8\cdot\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{a^2}{(1-a^2)(1+a^2)}\, da;$$

$$\frac{2a^2}{(1-a^2)(1+a^2)} = \frac{1}{1-a^2} - \frac{1}{1+a^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+a^2},$$

deci

$$\mathcal{A} = 2\left[a\ln\frac{1-a^2}{1+a^2} + \ln(1-a) + \ln(1+a) - 2\operatorname{arctg} a\right]_{\frac{1}{2}}^{0},$$

$$\mathcal{A} = -\ln\frac{3}{5} - 2\ln\frac{1}{2} - 2\ln\frac{3}{2} + 4\operatorname{arctg}\frac{1}{2},$$

sau

$$\mathcal{A} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \ln\frac{10}{3}.$$

46. 1) Să se studieze variația și să se reprezinte grafic

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

2) Să se determine mulțimea pentru care are sens ecuația

$$\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \sqrt{\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

3) Să se rezolve ecuația de la punctul 2.

4) Pentru ce valori ale lui x

$$\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} < \sqrt{\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

1968 — Facultatea de matematică mecanică, București

Scanned with OKEN Scanner

R. 1) Putem scrie $1+\sin x = 1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$,

$1-\sin x = 1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$, deci

$$f(x) = \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}\right|.$$

Studiem funcția în intervalul $[0, 2\pi]$ apoi o prelungim prin periodicitate.

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0, \quad \frac{x_1}{2}=\frac{3\pi}{4}, \quad x_1=\frac{3\pi}{2},$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0, \quad \frac{x_1'}{2}=\frac{\pi}{4}, \quad x_1'=\frac{\pi}{2}.$$

Mulțimea de definiție este $R-\left\{2k\pi+\frac{3\pi}{2},\ 2k'\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$, deci din intervalul $[0, 2\pi]$ trebuie să scoatem punctele $\frac{3\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$.

$$f(x)=0,\ \sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\pm\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right).$$

$$\sin\frac{x}{2}=0,\ x_1'=0,\ x_2''=2\pi,\ \cos\frac{x}{2}=0,\ x_3''=\pi.$$

Graficul admite asimptotele verticale $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} f(x)=-\infty.$$

Calculăm derivata lui $f(x)$. Folosim pentru $f(x)$ relația din enunț.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)^2},$$

$$f'(x)=\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x}=\frac{2}{\cos x},\quad x\neq\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2};$$

$$f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^2 x},\ f''(x)=0,\ x_1''=0,\ x_2''=\pi,\ x_3''=2\pi.$$

Tabloul de variație

x	0				$\frac{\pi}{2}$				π				$\frac{3\pi}{2}$				2π
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$			$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$		0	$\searrow$			$-\infty$	$\nearrow$			0

Scanned with OKEN Scanner

Graficul este dat în figura 93.

În grafic se ține seama că $f'(0) = f'(2\pi) = 2$ și $f'(\pi) = -2$.

Pe R graficul este dat în figura 94.

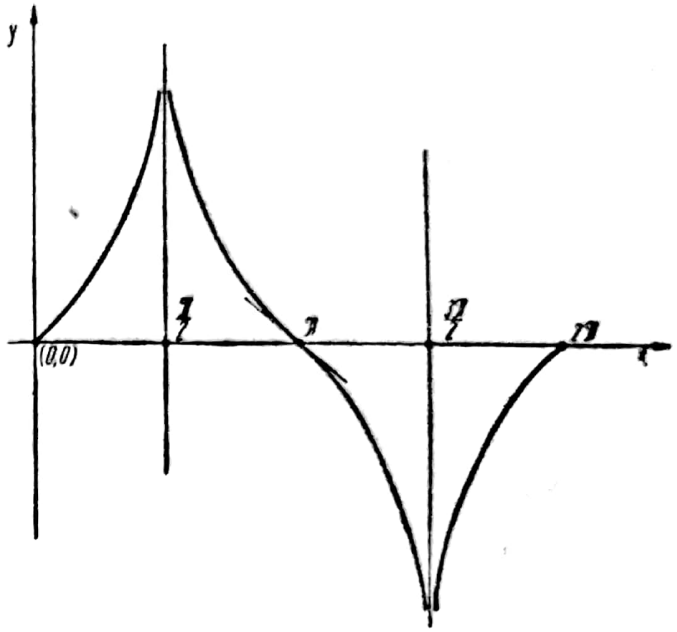


Fig. 93

2) Ecuația:

$$(\alpha) \quad \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \sqrt{\ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

are sens dacă

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0 \quad \text{și} \quad \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \geqslant 0,$$

deci

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \geqslant 1 \quad \text{sau} \quad \frac{2\sin x}{1-\sin x} \geqslant 0,$$

$$2\sin x\,(1-\sin x) \geqslant 0, \quad 2\sin x \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0,$$

prin urmare ecuația are sens pentru

$$x \in \left[2k\pi,\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(2k\pi + \frac{\pi}{2},\ 2k\pi + \pi\right].$$

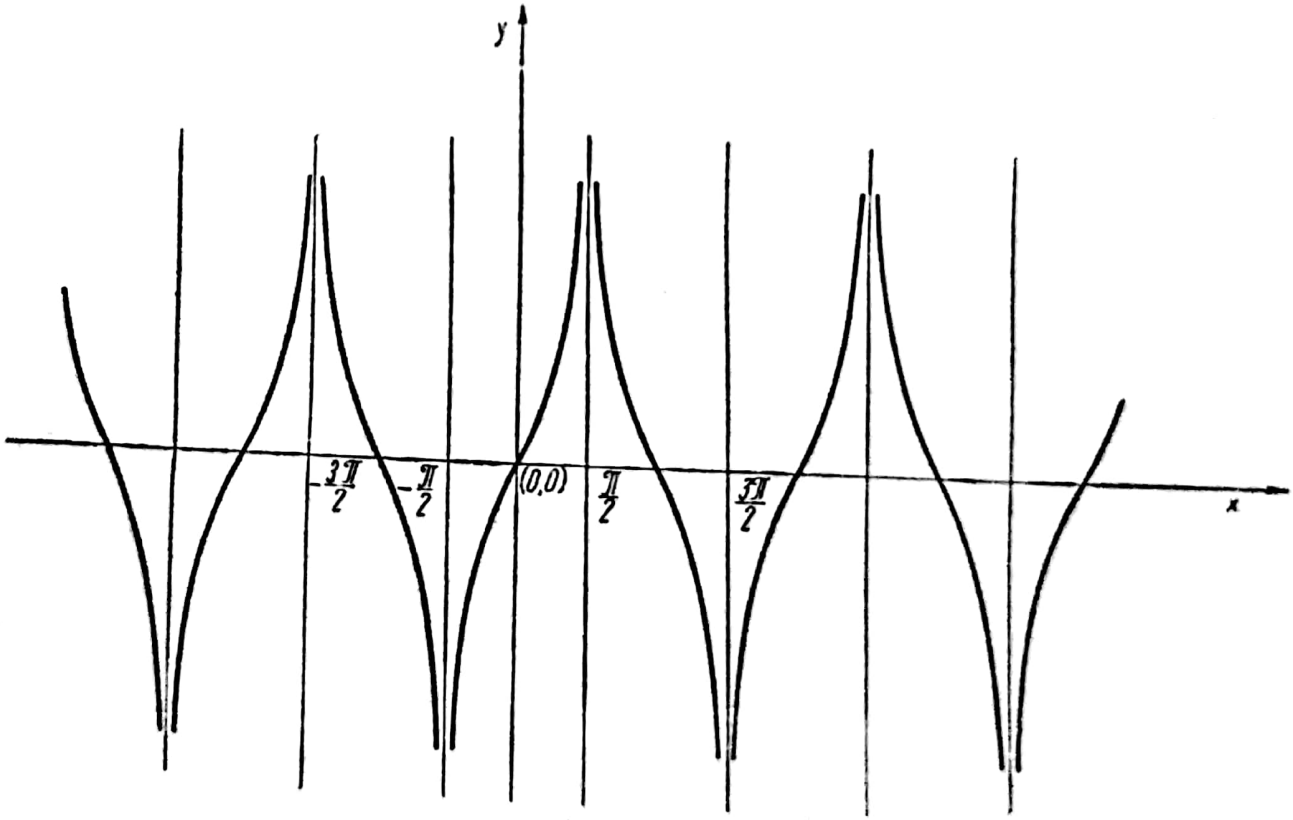


Fig. 94

3) Dacă notăm:

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \lambda \geqslant 1$$

ecuația (α) se scrie:

$$\frac{1}{2}\ln\lambda = \sqrt{\ln\lambda} \quad \text{sau} \quad \ln^2\lambda - 4\ln\lambda = 0,$$

deci are soluțiile $\ln\lambda_1 = 4$, $\ln\lambda_2 = 0$, care sînt admise. Ecuația $\ln\lambda_2 = 0$ dă

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = 1, \quad \frac{2\sin x}{1-\sin x} = 0, \quad x = k\pi.$$

Ecuația $\ln\lambda_2 = 4$, $\lambda_2 = e^4$ dă

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = e^4 \quad \text{sau} \quad \frac{1-e^4+(1+e^4)\sin x}{1-\sin x} = 0,$$

$$\sin x = \frac{e^4-1}{e^4+1} = \frac{e^2-e^{-2}}{e^2+e^{-2}} = \operatorname{th} 2,$$

deci $x' = 2k\pi + \operatorname{arcsin}\operatorname{th} 2$, $x'' = (2k'+1)\pi - \operatorname{arcsin}\operatorname{th} 2$.

4) Trebuie să avem

$$\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} < \sqrt{\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

Din discuția precedentă rezultă că $\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0$, deci $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} > 1$. Trebuie să avem deci $\ln^2\lambda - 4\ln\lambda < 0$, $\ln\lambda > 0$, sau

$$\ln\lambda(\ln\lambda - 4) < 0, \quad \ln\lambda > 0,$$

ceea ce dă $0 < \ln\lambda < 4$ sau

$$0 < \frac{1+\sin x}{1-\sin x} < e^4.$$

47. Se dă funcția

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctg}\dfrac{1}{x} + \ln(1+x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1) Să se găsească mulțimile de continuitate și de derivabilitate.

2) Să se studieze variația și să se reprezinte grafic.

3) Să se calculeze aria domeniului plan cuprins între graficul lui $f(x)$, axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = N > 0$. Să se determine un număr N astfel încît aria obținută să fie mai mare ca 600.

Scanned with OKEN Scanner

R. 1) Pe $R - \{0\}$, $f(x)$ este suma a două funcții elementare continue. Deoarece suma a două funcții continue pe o aceiași mulțime A este o funcție continuă pe A, rezultă că f este continuă pe $R - \{0\}$. Rămîne să mai cercetăm continuitatea în punctul $x = 0$ în care funcția f este definită și ia valoarea zero. Avem:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} + \lim_{x \to 0+} \ln (1 + x^2) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} + \lim_{x \to 0-} \ln (1 + x^2) = -\frac{\pi}{2},$$

deci f nu este continuă în punctul $x = 0$.

Pentru a stabili mulțimea de derivabilitate procedăm în același mod. Pe $R - \{0\}$, f este suma a două funcții derivabile deci f este derivabilă. În punctul zero problema derivabilității nu se pune deoarece în acest punct f nu este continuă.

2) Numărul rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$ cît și intervalele în care se găsesc vor rezulta din grafic.

Avem

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{2x - 1}{1 + x^2},$$

$$f'(x) = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{Arctg} 2 + \ln\left(\frac{5}{4}\right),$$

$$f''(x) = \frac{2(1 + x^2) - 2x(2x - 1)}{(1 + x^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{(1 + x^2)^2},$$

$$f''(x) = 0, \quad x^2 - x - 1 = 0, \quad x_1'' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2'' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Graficul nu are asimptote orizontale, verticale și oblice.

Tabloul de variație

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	B	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\operatorname{Arctg} 2 + \ln \frac{5}{4}$	$\nearrow$	C	$\nearrow$	$+\infty$
							A						

Scanned with OKEN Scanner

Graficul este dat în figura 95.

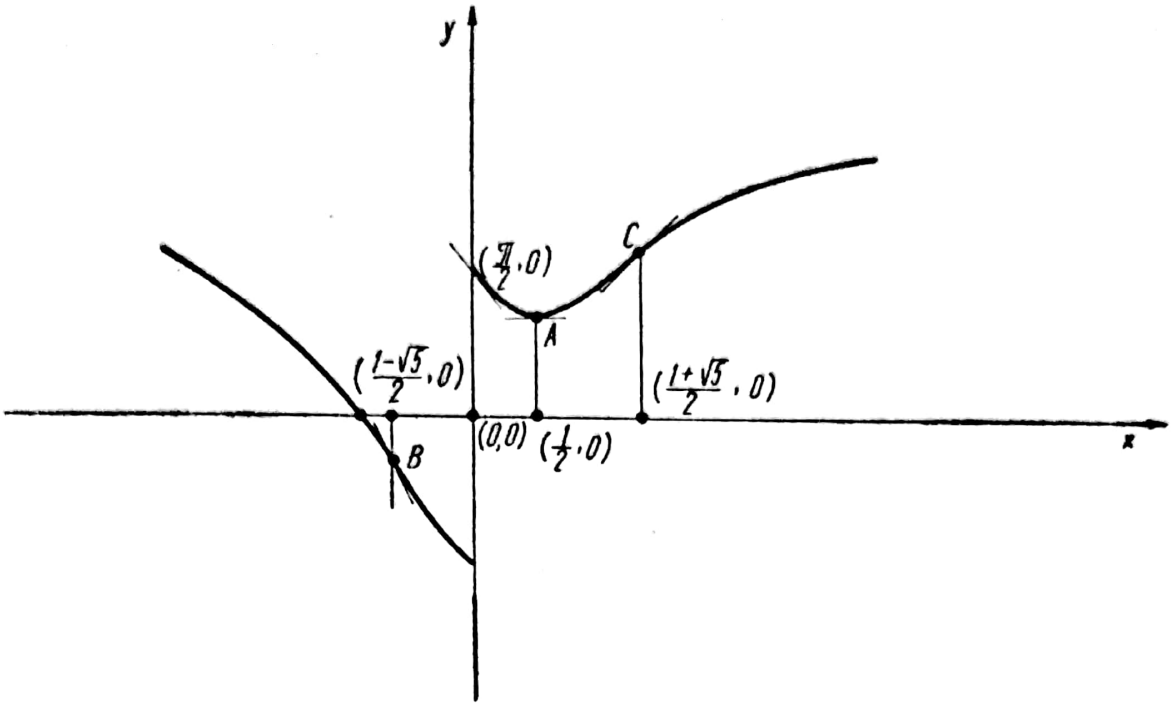


Fig. 95

În trasarea graficului se ține seama că $f'(0-) = -1$, $f'(0+) = -1$

Din grafic reiese că ecuația $f(x) = 0$ pe $R - \{0\}$ are o singură rădăcină reală negativă.

3) Pe $(0, N)$, $f(x) > 0$, deci aria căutată este dată de

$$\mathcal{A} = \int_0^N \left[\operatorname{Arctg}\frac{1}{x} + \ln(1+x^2)\right] dx.$$

Integrăm prin părți

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^N \operatorname{Arctg}\frac{1}{x}\,dx = x\operatorname{Arctg}\frac{1}{x}\Big|_0^N + \int_0^N \frac{x}{1+x^2}\,dx,$$

$$\mathcal{A}_1 = N\operatorname{Arctg}\frac{1}{N} + \frac{1}{2}\ln(1+N^2);$$

$$\mathcal{A}_2 = \int_0^N \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2)\Big|_0^N - \int_0^N \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx,$$

$$\mathcal{A}_2 = x\ln(1+x^2)\Big|_0^N - 2x\Big|_0^N + 2\operatorname{Arctg} x\Big|_0^N,$$

$$\mathcal{A}_2 = N\ln(1+N^2) - 2N + 2\operatorname{Arctg} N;$$

$$\mathcal{A} = N\operatorname{Arctg}\frac{1}{N} + \frac{2N+1}{2}\ln(1+N^2) - 2N + 2\operatorname{Arctg} N.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a determina un număr $N > 0$ astfel încît $\mathcal{A} > 600$, observăm că pentru orice $N > 0$, $\operatorname{Arctg} N < \frac{\pi}{2}$.

Deoarece $\operatorname{Arctg} \frac{1}{N} \to 0$ cînd $N \to \infty$, iar produsul $N \operatorname{Arctg} \frac{1}{N} \to 1$ cînd $N \to \infty$ rezultă că partea hotărîtoare din aria lui $\mathcal{A}$ este:

$$\left(N + \frac{1}{2}\right) \ln (1 + N^2) - 2N,$$

avînd în vedere numărul 600 cu care se compară. Avem

$$\mathcal{A} > \left(N + \frac{1}{2}\right) \ln (1 + N^2) - 2N,$$

dacă înlocuim pe $\ln (1 + N^2)$ cu $\ln N^2 = 2 \ln N$ obținem

$$\mathcal{A} > 2N (\ln N - 1) + \ln N.$$

Este suficient să luăm $N = 10^2$ pentru ca aria $\mathcal{A}$ să satisfacă condiția cerută. În adevăr

$$\mathcal{A} > 2 \cdot 10^2 \cdot (2 \ln 10 - 1) + \ln 10 > 600,$$

deoarece $\ln 10 = 2{,}302 \ldots$

Faptul că am înlocuit pe $\ln (N^2 + 1)$ cu $\ln N^2$ nu influențează rezultatul obținut avînd în vedere că $\ln N$ crește mult mai încet decît N.

48. Se dă funcția

$$f(a) = a(1 + a) \int_0^1 \frac{dx}{(1 + a)^2 + a^2 x^2}, \quad a \neq -1$$

unde a este un parametru real.

1) Să se determine $f(a)$ și mulțimea ei de definiție.

2) Să se studieze variația și să se reprezinte grafic, a fiind considerat variabila independentă.

3) Să se calculeze aria mărginită de grafic, axa Ox și dreptele

$$x = 0 \quad \text{și} \quad x = 2.$$

4) Să se arate că $f'(a)$ este mărginită pe mulțimea de definiție. Să se determine marginile lui $f'(a)$.

R. 1) Avem

$$f(a) = \frac{a(1 + a)}{a^2} \int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{(1 + a)}{a}\right)^2 + x^2},$$

și facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1+a}{a}u$,

$$dx = \frac{1+a}{a}du,\quad x = 0,\quad u = 0,\quad x = 1,\quad u = \frac{a}{1+a},$$

deci

$$f(a) = \frac{1+a}{a}\int_0^{\frac{a}{1+a}} \frac{1+a}{a}\frac{a^2}{(1+a)^2}\frac{du}{1+u^2}$$

sau

$$f(a) = \operatorname{Arctg} u\Big|_0^{\frac{a}{1+a}} = \operatorname{Arctg}\frac{a}{1+a};$$

mulțimea de definiție a lui f este $R - \{-1\}$

2) Avem

$$f(a) = \operatorname{Arctg}\frac{a}{1+a},\ a \in R - \{-1\},$$

$$\lim_{a\to+\infty} f(a) = \frac{\pi}{4},\quad \lim_{a\to-\infty} f(a) = \frac{\pi}{4},$$

prin urmare graficul admite asimptota orizontală $y = \frac{\pi}{4}$. Avem și

$$\lim_{a\to-1+0} f(a) = \lim_{a\to-1+0} \operatorname{Arctg}\frac{a}{1+a} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{a\to-1-0} f(a) = \lim_{a\to-1-0} \operatorname{Arctg}\frac{a}{1+a} = \frac{\pi}{2},$$

deci în punctul $a = -1$, f are limite finite însă diferite între ele.

$$f'(a) = \frac{1}{1+\frac{a^2}{(1+a)^2}}\frac{1+a-a}{(1+a)^2} = \frac{1}{1+2a+2a^2},$$

$$f'(a) > 0 \quad \text{pe} \quad R - \{-1\};$$

$$f''(a) = -\frac{4a+2}{(1+2a+2a^2)^2},\qquad f''(a) = 0,\qquad a_1 = -\frac{1}{2}.$$

Tabloul de variație

a	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(a)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(a)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(a)$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $\frac{\pi}{4}$

Graficul este dat în figura 96.

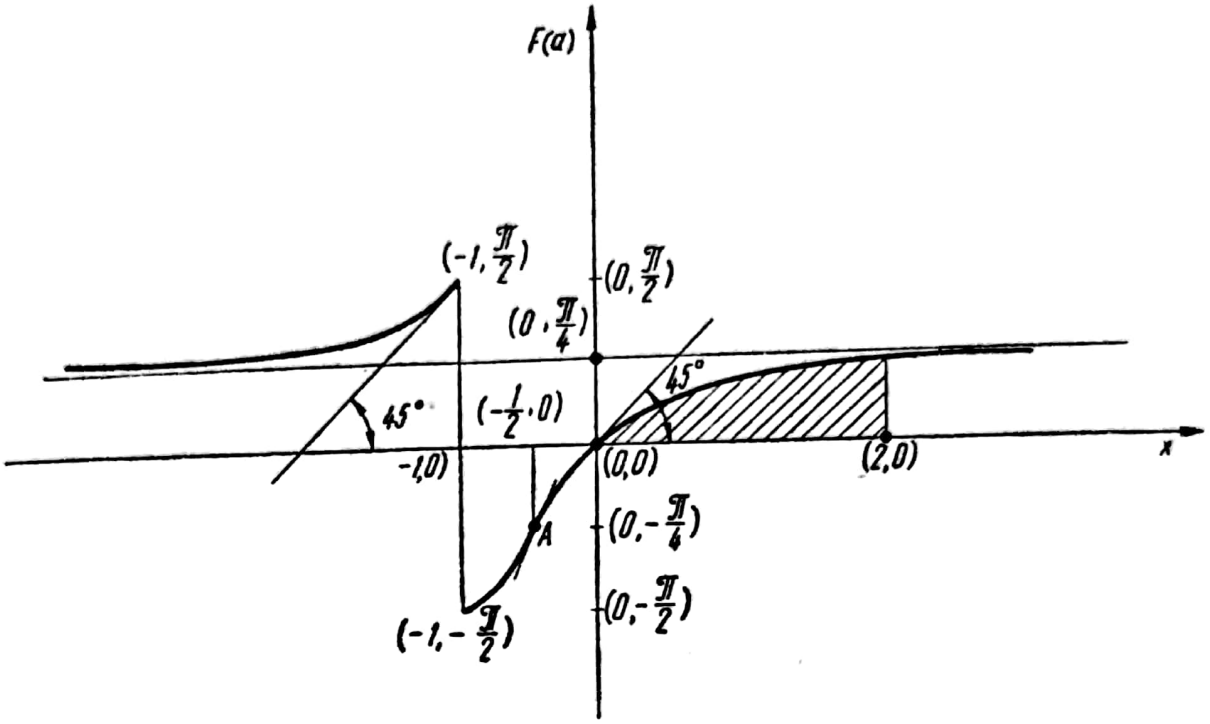


Fig. 96

În origine graficul admite tangenta paralelă cu prima bisectoare a axelor. Avem

$$f'(-1+0) = f'(-1-0) = 1 \text{ și } f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2.$$

3) Aria cerută este dată de integrala definită

$$\mathcal{A} = \int_0^2 \operatorname{arctg} \frac{a}{1+a}\,da,$$

pe care o efectuăm prin părți: $u = \operatorname{arctg} \frac{a}{1+a}$, $dv = da$, $v = a$, $du = \frac{da}{1+2a+2a^2}$; obținem

$$\mathcal{A} = a \operatorname{arctg} \frac{a}{1+a}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{a\,da}{1+2a+2a^2},$$

avem

$$\frac{a}{1+2a+2a^2} = \frac{1}{4}\,\frac{4a+2}{1+2a+2a^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+2a+2a^2},$$

și

$$2a^2+2a+1 = 2\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right],$$

de unde rezultă că

$$\int_0^2 \frac{a\,da}{1+2a+2a^2} = \left[\frac{1}{4}\ln(1+2a+2a^2) - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{2a+1}{\sqrt{2}}\right]_0^2;$$

aria cerută are valoarea

$$\mathcal{A} = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \ln 13 + \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

4) Avem

$$f'(a) = \frac{1}{(1+a)^2 + a^2}, \quad a \in R - \{-1\}$$

observăm că numitorul lui $f'(a)$ nu se anulează pe mulțimea de definiție, deci

$$\inf f'(a) = \frac{1}{\sup[(1+a)^2 + a^2]} = 0$$

deoarece $\sup [(1+a)^2 + a^2] = +\infty$;

$$\sup f'(a) = \frac{1}{\inf [(1+a)^2 + a^2]}.$$

Notăm $g(a) = (1+a)^2 + a^2$, $g'(a) = 2(1+a) + 2a$, $g'(a) = 0$, $a = -\frac{1}{2}$; în acest punct $g(a)$ are un minim dat de $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, de unde $\sup f'(a) = 2$. Pentru orice $a \in R - \{-1\}$ avem, $0 < f'(a) \leqslant 2$.

49. Se dă funcția:

$$f(x) = \log_A (9 - x^2)^{\frac{1}{B}} \text{ cu } A = x^2 - x - 2, \; B = 9 - x^2.$$

1) Să se efectueze schimbarea de bază, trecîndu-se la logaritmii naturali.

2) Să se afle mulțimea maximă de definiție a funcției f.

3) Să se rezolve inegalitatea $f(x) > 0$.

4) Să se calculeze $f'(x)$.

1968, Facultatea de matematică mecanică, București.

R. 1) Dacă $a > 0$, b 0, $a \neq 1$, $b \neq 1$ și dacă

$$N = a^x, \qquad N = b^y$$

atunci din

$$\log_a N = x, \qquad \log_b N = y$$

și $\log_b N = x \log_b a$, $\log_a N = y \log_a b$,
deducem

$$1 = \log_b a \cdot \log_a b \text{ și } \log_b N = \log_a N \frac{1}{\log_a b};$$

dacă luăm $A = b = x^2 - x - 2$, $a =$ e rezultă

$$\log_{x^2-x-2} (9 - x^2)^{\frac{1}{9 - x^2}} = \frac{\ln (9 - x^2)}{(9 - x^2) \ln (x^2 - x - 2)},$$

deci

$$f(x) = \frac{\ln (9 - x^2)}{(9 - x^2) \ln (x^2 - x - 2)}.$$

2) Funcția $f(x)$ este definită dacă

$$9 + x^2 > 0, \qquad x \in (-3, 3),$$

și dacă

$$x^2 - x - 2 > 0, \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty),$$

prin urmare mulțimea maximă de definiție este

$$(\alpha) \qquad (-3, -1) \cup (2, 3).$$

3) Deoarece pe mulțimea de definiție $9 - x^2 > 0$, rezultă

$f(x) > 0$ dacă

$$\ln (9 - x^2) \ln (x^2 - x - 2) > 0;$$

$\ln (9 - x^2) > 0$ dacă $9 - x^2 > 1$, $x^2 < 8$, $x \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$,

iar pentru $x \in (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3)$, $\ln (9 - x^2) < 0$;

$\ln (x^2 - x - 2) > 0$ dacă $x^2 - x - 2 > 1$, $x^2 - x - 3 > 0$

deci pentru

$$x \in \left(-3, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, 3\right);$$

iar pentru

$$x \in \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, -1\right) \cup \left(2, \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right), \quad \ln (x^2 - x - 2) < 0.$$

Avem $-2\sqrt{2} < \frac{1}{2}(1 - \sqrt{13})$, $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{13}) < 2\sqrt{2}$

x	-3	$-2\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{13})$	-1	2	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})$	$2\sqrt{2}$	3
$\ln (9 - x^2)$	$- - -$	0	$+ + +$	$+$	$+$	$+ + + + +$	0	$- - -$
$\ln (x^2 - x - 2)$	$+ + + + +$	0	$- - - -$	$-$	$-$	$- - - -$	0	$+ + + + + +$
$f(x)$	$- - - -$	$+ + +$	$- - - -$			$- - -$	$+ + +$	$- - -$

deci $f(x) > 0$ pentru $x \in (-2\sqrt{2}, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{13})) \cup (\frac{1}{2}(1 + \sqrt{13}), 2\sqrt{2})$.

4) Avem

$f(x) = (9 - x^2)^{-1} \ln^{-1} (x^2 - x - 2) \cdot \ln (9 - x^2)$, și f este derivabilă pe mulțimea de definiție (α),

$$f'(x) = 2x(9 - x^2)^{-2} \ln^{-1} (x^2 - x - 2) \ln (9 - x^2) -$$

$$- (9 - x^2)^{-1}(x^2 - x - 2)^{-1}(2x - 1) \ln^{-2}(x^2 - x - 2) \ln (9 - x^2) -$$

$$- 2x(9 - x^2)^{-2} \ln^{-1} (x^2 - x - 2), \quad x \in (-3, -1) \cup (2, 3),$$

deci

$$f'(x) = 2x(9 - x^2)^{-2} \ln^{-1}(x^2 - x - 2)\,[\ln(9 - x^2) - 1] -$$

$$- (x^2 - x - 2)^{-1}(9 - x^2)^{-1}(2x - 1) \ln^{-2}(x^2 - x - 2) \ln(9 - x^2).$$

50. Se dă funcţia

$$f(x) = ae^{1+2x-ax^2}, \quad x \in R$$

unde a este un parametru real.

1) Să se găsească punctele de extremum ale lui f.
2) Să se discute după a natura acestor extreme.
3) Cînd a variază pe R să se găsească locul geometric descris de punctele de extremum.
4) Să se reprezinte grafic locul geometric de la punctul 3.

R. 1) Funcţia f are mulţimile de definiţie, de continuitate şi de derivabilitate R, oricare ar fi numărul real a.

Punctele de extremum ale lui f se găsesc printre punctele care anulează pe f'

$$f'(x) = a(2 - 2ax)\, e^{1+2x-ax^2}, \quad x \in R,$$

$$f'(x) = 0, \quad x = \frac{1}{a}, \quad a \neq 0.$$

2) Avem pentru $\varepsilon > 0$

$$f'\left(\frac{1}{a} + \varepsilon\right) = a(2 - 2 - 2a\varepsilon)\, e^{1 + 2\left(\frac{1}{a} + \varepsilon\right) - a\left(\frac{1}{a} + \varepsilon\right)^2} < 0$$

$$f'\left(\frac{1}{a} - \varepsilon\right) = a(2 - 2 + 2a\varepsilon)\, e^{1 + 2\left(\frac{1}{a} - \varepsilon\right) - a\left(\frac{1}{a} - \varepsilon\right)^2} > 0$$

deci în punctul $x = \frac{1}{a}$, $a \neq 0$, are un maximum.

Pentru $a = 0$, $f(x) = 0$, deci f este constantă pe R.

3) Punctul de maxim are coordonatele

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a}, \\ y = ae^{1 + \frac{1}{a}}, \quad a \in R, \ a \neq 0, \end{cases}$$

dacă eliminăm pe a între aceste două relaţii obţinem ecuaţia locului geometric, anume

$$y(x) = \frac{1}{x} e^{1+x}, \quad x \in R - \{0\}.$$

4) Avem

$$\lim_{x \to 0+} y(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0-} y(x) = -\infty.$$

Graficul admite asimptota verticală $x = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem și

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0,$$

deoarece

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1+x}}{1} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \lim_{x\to-\infty} e^{1+x} = 0.$$

Graficul admite asimptota orizontală $y = 0$.

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1+x} + \frac{1}{x}e^{1+x} = \frac{1}{x^2}(x-1)e^{1+x}, \quad x \in R - \{0\},$$

$$y'(x) = 0, \quad x = 1;$$

$$y''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)e^{1+x} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^{1+x},$$

$$y''(x) = \frac{1}{x^3}(2 - 2x + x^2)e^{1+x}, \quad x \in R - \{0\},$$

$$y''(x) > 0, \quad x > 0, \quad y''(x) < 0, \quad x < 0.$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$							0				1			$+\infty$
$y'(x)$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+
$y''(x)$	+	+	+	+	+	+		−	−	−	−	−	−	−	
$y(x)$	0		↘				$-\infty$	$+\infty$		↘	e^2	↗			$+\infty$
											A				

Graficul este dat în figura 97.

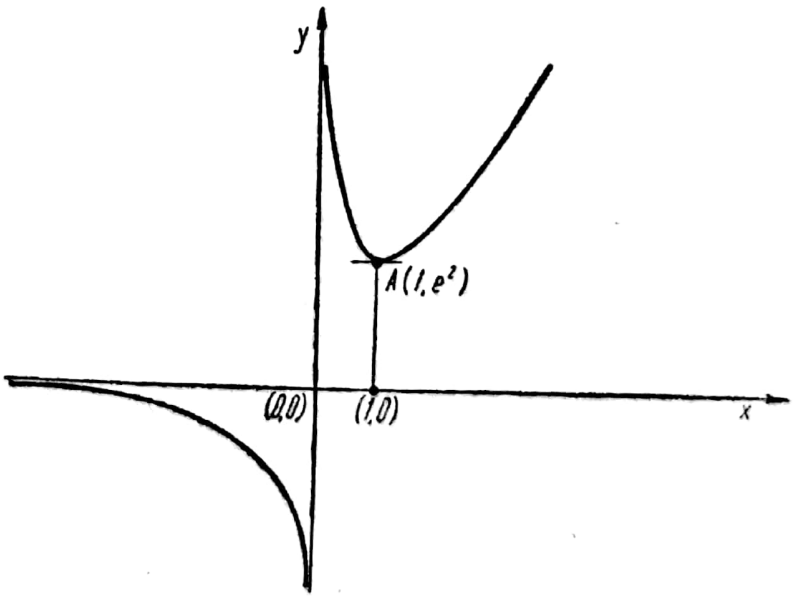


Fig. 97

51. Se dă

$$f(x) = \ln\left(\frac{2|x| - 1}{x + 2}\right)^2$$

şi se cere:

1) să se determine mulţimile de definiţie, de continuitate şi de derivabilitate;

2) în punctele în care f nu este derivabilă să se calculeze derivatele laterale;

3) să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic $f(x)$;

4) să se calculeze aria domeniului plan cuprins între graficul lui f, axa Ox şi dreptele $x = 3$ şi $x = 4$.

R. 1) Avem

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{2x - 1}{x + 2}\right)^2, & x \in (0, +\infty) - \left\{\frac{1}{2}\right\}, \\ \ln\frac{1}{4}, & x = 0, \\ \ln\left(\frac{2x + 1}{x + 2}\right)^2, & x \in (-\infty, 0) - \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}. \end{cases}$$

Mulţimea de definiţie a lui f este $R - \left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

În punctul $x = 0$ avem

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \ln\frac{1}{4}, \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = \ln\frac{1}{4},$$

deci mulţimea de continuitate este mulţimea de definiţie.

Pentru a stabili mulţimea de derivabilitate observăm că pe $(0, +\infty) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ funcţia

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x - 1}{x + 2}\right)^2$$

este derivabilă; pe $(-\infty, 0) - \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$ funcţia

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x + 1}{x + 2}\right)^2$$

este derivabilă. Rămîne să mai cercetăm dacă f este derivabilă în punctul $x = 0$. Întrucît în acest punct f este continuă nu avem de calculat decît $f'(0-)$ şi $f'(0+)$.

Avem pe $(0, +\infty) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$f'(x) = 2\frac{x + 2}{2x - 1} \cdot \frac{2(x + 2) - (2x - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{10}{(2x - 1)(x + 2)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

deci $f'(0+) = -5$.

Pe $(-\infty, 0) - \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$,

$$f'(x) = 2\,\frac{x+2}{2x+1}\,\frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{6}{(2x+1)(2x+2)},$$

deci $f'(0-) = 3$. Deoarece $f'(0-) \neq f'(0+)$ urmează că f nu este derivabilă în origine. Mulțimea de derivabilitate este

$$R - \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}.$$

3) Avem

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -2} f(x) = +\infty,$$

deci graficul admite asimptotele verticale $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$ și $x = +\frac{1}{2}$.

Avem

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ln 4, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \ln 4,$$

graficul admite asimptota orizontală $y = \ln 4$.

Intersecțiile cu axa Ox sînt date de punctele definite de

$$\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^2 = 1, \quad \frac{2x-1}{x+2} = 1, \quad \frac{2x-1}{x+2} = -1, \quad x \in (0, +\infty) - \left\{\frac{1}{2}\right\},$$

cu soluțiile $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$; sau de

$$\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = 1, \quad \frac{2x+1}{x+2} = 1, \quad \frac{2x+1}{x+2} = -1, \quad x \in (-\infty, 0) - \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}$$

cu soluțiile $x_1' = 1$, $x_2' = -1$; dintre acestea $x_2 = -\frac{1}{3}$ și $x_1 = 1$ trebuie excluse nefiind în mulțimea de definiție.

Tabloul de variație

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + +			− − − − − − −			+ + +		− − − −		+ + + + + + +				
$f(x)$	$\ln 4$	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$	$-\infty$	↗	$\ln\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$	$-\infty$	↗	0	↗ $\ln 4$

Graficul este dat în figura 98.

Graficul are în punctul $\left(0, \ln\frac{1}{4}\right)$ un maximum; în acest punct funcția nu are derivată deși este continuă; este un punct unghiular.

Scanned with OKEN Scanner

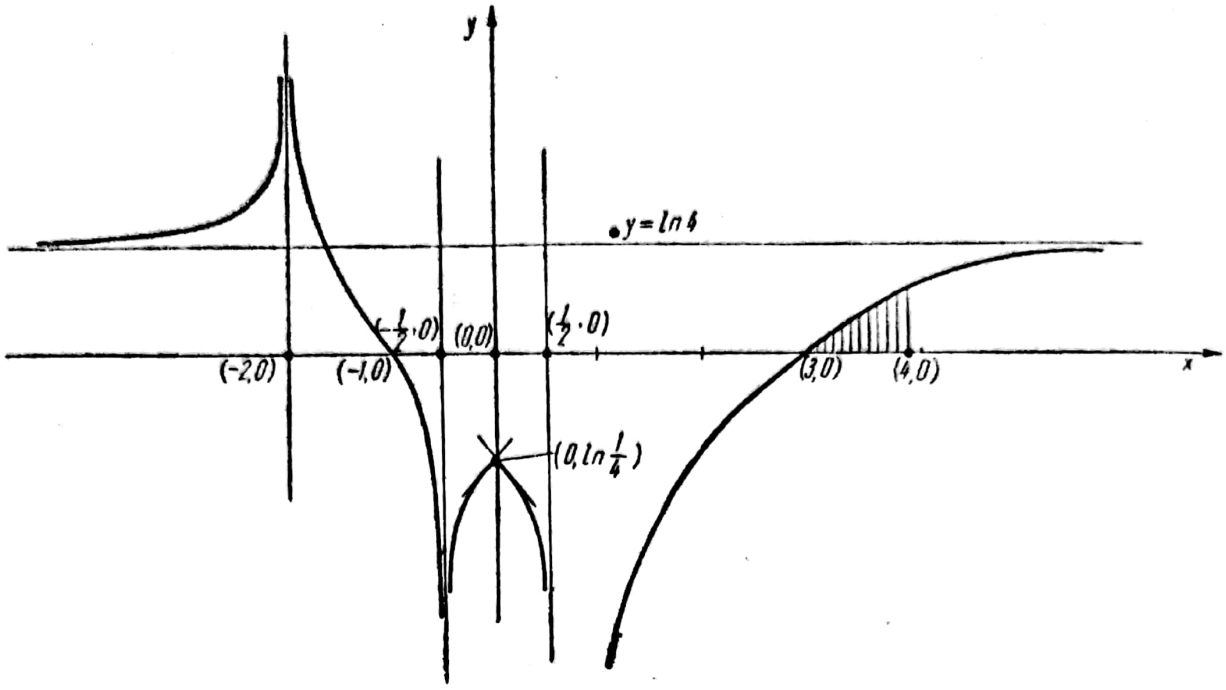


Fig. 98

4) În intervalul $[3, 4]$, $f(x) \geqslant 0$, deci aria cerută este dată de integrala

$$\mathcal{A} = \int_3^4 \ln \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^2 dx = 2\int_3^4 \ln (2x-1)\, dx - 2\int_3^4 \ln (x+2)\, dx,$$

$$\mathcal{A}_1 = 2\int_3^4 \ln (2x-1)\, dx = (2x-1)\ln (2x-1)\Big|_3^4 - 2x\Big|_3^4,$$

deci

$$\mathcal{A}_1 = 7 \ln 7 - 5 \ln 5 - 2.$$

$$\mathcal{A}_2 = 2\int_3^4 \ln (x+2)\, dx = 2(x+2)\ln (x+2)\Big|_3^4 - 2x\Big|_3^4,$$

deci

$$\mathcal{A}_2 = 12 \ln 6 - 10 \ln 5 - 2,$$

de unde

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 = 7 \ln 7 - 5 \ln 5 - 12 \ln 6 + 10 \ln 5 = \ln \frac{7^7 \cdot 5^5}{6^{12}}.$$

52. Se dă ecuaţia.

$$2x^3 - (5m-3)\, x^2 + (4m-1)\, x - m = 0.$$

Determinînd $m(x)$ din ecuaţia dată ca raport de polinome

$$m(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

și notînd

$$f(x) = \frac{5}{2}\,\frac{P(x) + x(1-x)}{Q(x) + 4(x+1)}$$

să se calculeze

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^x$,

și

2) $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3) Să se determine parametrul rațional m astfel încît rădăcinile ecuației date să fie în progresie geometrică.

1970, Institutul de Construcții, București.

R. 1) Avem

$$2x^3 + 3x^2 - x - m(5x^2 - 4x + 1) = 0,$$

deci pentru $5x^2 - 4x + 1 \neq 0$, avem

$$m(x) = \frac{x(2x^2 + 3x - 1)}{5x^2 - 4x + 1},$$

de unde rezultă că

$$P(x) \equiv x(2x^2 + 3x - 1), \qquad Q(x) \equiv 5x^2 - 4x + 1;$$

$f(x)$ este dat de

$$f(x) = \frac{5}{2}\,\frac{x(2x^2 + 3x - 1) + x(1-x)}{5x^2 - 4x + 1 + 4x + 4} = \frac{5}{2}\,\frac{2x(x^2 + x)}{5(x^2 + 1)},$$

sau

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^2 + 1}, \quad x \in R.$$

Avem de calculat

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + x}{x^2 + 1}\right)^x,$$

nedeterminarea este de forma 1^∞. Notăm

$$y = \left(\frac{x^2 + x}{x^2 + 1}\right)^x \text{ deci } \ln y = x \ln\frac{x^2 + x}{x^2 + 1};$$

calculăm

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\frac{x^2 + x}{x^2 + 1}}{\frac{1}{x}},$$

nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Îi aplicăm regula lui l'Hospital. Avem

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3+x} \cdot \frac{(2x+1)(x^3+1)-2x(x^2+x)}{(x^3+1)^2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2(-x^2+2x+1)}{(x^3+x)(x^3+1)} = 1.$$

Deoarece $\lim_{x\to\infty} \ln y = 1$ rezultă că

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^x = e.$$

2) Avem de calculat integrala definită

$$I = \int_0^1 \frac{x^2(x+1)}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{(x^2+1-1)(x+1)}{x^2+1}\,dx,$$

deci

$$I = -\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 (x+1)\,dx,$$

$$I = \left[-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = \frac{3}{2} - \ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}.$$

3) Ecuația

$$2x^3 - (5m-3)x^2 + (4m-1)x - m = 0$$

trebuie să aibă rădăcinile în progresie geometrică.

Relațiile dintre rădăcini și coeficienți sînt

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5m-3}{2},$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{4m-1}{2},$$

$$x_1x_2x_3 = \frac{m}{2}.$$

Dacă punem $x_1 = \frac{1}{\rho}a$, $x_2 = a$, $x_3 = a\rho$, $a \neq 0$, $\rho \neq 0$, obținem din ultima relație $a^3 = \frac{m}{2}$ deci $a = \sqrt[3]{\frac{m}{2}}$ este o rădăcină a ecuației date. Din primele relații avem

$$a\left(\frac{1}{\rho} + 1 + \rho\right) = \frac{5m-3}{2},$$

$$a^2\left(\frac{1}{\rho} + \rho + 1\right) = \frac{4m-1}{2};$$

prin împărțire obținem

$$\frac{4m-1}{5m-3}=a \text{ deci } \left(\frac{4m-1}{5m-3}\right)^3=\frac{m}{2},$$

relație care determină pe m pentru ca ecuația dată să aibă rădăcinile în progresie geometrică. Observăm că pentru $m_1=2$ ecuația $\left(\frac{4m-1}{5m-3}\right)^4=\frac{m}{2}$, este verificată. Scriem astfel $\left(\frac{4m-1}{5m-3}\right)^3-1=\frac{m-2}{2}$ sau $\frac{(4m-1)^2+(4m-1)(5m-3)+(5m-3)^2}{(5m-3)^3}=-\frac{1}{2}$.

Obținem ecuația

$$(5m-3)^3+2(5m-3)^2+2(5m-3)(4m-1)+2(4m-1)^2=0,$$

unde coeficientul lui m^3 este 125 și coeficientul termenului liber este -1. De aici rezultă că singurele rădăcini numere raționale ce pot fi admise sînt

$$\pm\frac{1}{5},\ \pm\frac{1}{25},\ \pm\frac{1}{125},$$

și nici una nu satisface ecuația dată.

Pentru $m=2$ ecuația devine

$$2x^3-7x^2+7x-2=0$$

care admite rădăcina $x_1=1$. Celelalte două rădăcini sînt date de ecuația $2x^2-5x+2=0$ care sînt una inversă celeilalte. Avem

$$x_2=\frac{5+\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5+3}{4}=2,\ x_3=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}.$$

53. Se dă

$$F(a)=\frac{a}{2}\int_0^1\frac{dx}{(1+ax)\sqrt{1+2ax}}$$

și se cere:

1) să se determine $F(a)$ și mulțimea ei de definiție;

2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic,

3) să se calculeze aria domeniului mărginit de grafic, axa Ox și drepta $x=1$;

4) să se arate că $F''(a)$ este strict monotonă pe mulțimea de definiție; să se găsească marginile inferioare și superioare ale lui F''.

R. 1) Dacă notăm $1 + 2ax = u^2$ obținem $dx = + \frac{1}{a} u\,du$,

$$x = \frac{u^2 - 1}{2a},\quad 1 + ax = 1 + \frac{u^2 - 1}{2} = \frac{u^2 + 1}{2};$$

$$x = 0,\quad u = 1;$$

$x_1 = 1$, $u = \sqrt{1 + 2a}$ deci $[0, 1] \to [1, \sqrt{1 + 2a}]$. Avem

$$F(a) = \frac{a}{2} \int_1^{\sqrt{1+2a}} \frac{1}{a} \frac{2u\,du}{u(u^2 + 1)} = \int_1^{\sqrt{1+2a}} \frac{du}{u^2 + 1},$$

$$F(a) = \operatorname{Arctg} u \Big|_1^{\sqrt{1+2a}} = \operatorname{Arctg} \sqrt{1 + 2a} - \frac{\pi}{4}.$$

$F(a)$ este definită pentru $1 + 2a > 0$, $a > -\frac{1}{2}$.

2) $\lim\limits_{a \to -\frac{1}{2} + 0} F(a) = \frac{-\pi}{4}$, $\lim\limits_{a \to +\infty} F(a) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$;

graficul admite asimptota orizontală $F(a) = \frac{\pi}{4}$;

$$F'(a) = \frac{1}{1 + 1 + 2a} \frac{2}{2\sqrt{1 + 2a}} = \frac{1}{2(1 + a)\sqrt{1 + 2a}},$$

$$\lim_{a \to -\frac{1}{2} + 0} F'(a) = + \infty;\ F'(a) > 0,\ a \in \left(-\frac{1}{2}, + \infty\right).$$

$$F''(a) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1 + a)^2\sqrt{1 + 2a}} + \frac{1}{(1 + 2a)^{3/2}(a + 1)}\right] < 0 \text{ pe } \left(-\frac{1}{2}, + \infty\right).$$

Tabelul de variație

a	$-\frac{1}{2}$				0					$+\infty$
$F'(a)$	$+$	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$F(a)$	$-\frac{\pi}{4}$		$\nearrow$		0			$\nearrow$		$\frac{\pi}{4}$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul este dat în figura 99.

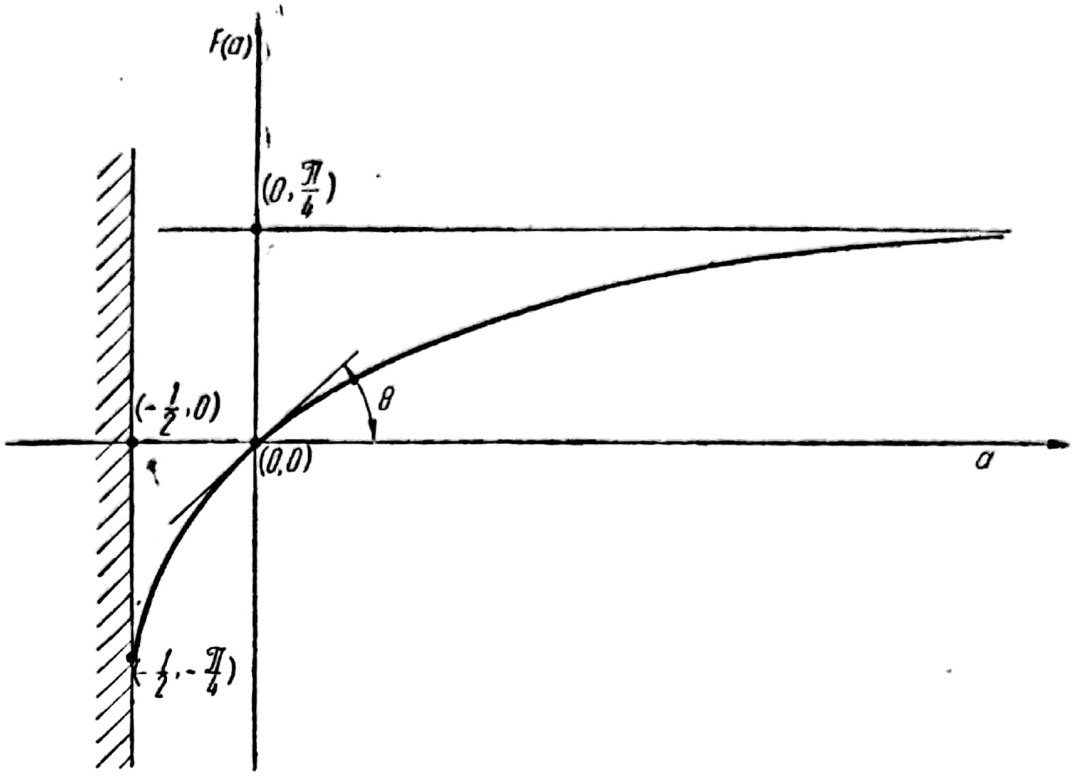


Fig. 99

În origine avem $F'(0) = \frac{1}{2}$.

3) Aria cerută este dată de integrala definită

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \left(\operatorname{Arctg} \sqrt{1 + 2a} - \frac{\pi}{4} \right) da,$$

$$\mathcal{A} = -\frac{\pi}{4} a \Big|_0^1 + \int_0^1 \operatorname{Arctg} \sqrt{1 + 2a}\, da.$$

Integrala din partea a doua o efectuăm prin părți: $u = \operatorname{Arctg} \sqrt{1 + 2a}$, $dv = da$, $v = a$,

$$du = \frac{1}{1 + 1 + 2a} \frac{da}{\sqrt{1 + 2a}},$$

deci

$$\mathcal{A} = \left[-\frac{\pi}{4} a + a \operatorname{Arctg} \sqrt{1 + 2a} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{a\,da}{(1 + a) \sqrt{1 + 2a}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Punem $1 + 2a = u^2$, $a = \frac{u^2 - 1}{2}$, $da = u\,du$,

$$1 + a = \frac{u^2 + 1}{2};\ \text{cînd } a = 0,\ u = 1,\ a = 1,\ u = \sqrt{3},\ \text{deci}$$

$$\mathcal{A} = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\,du,$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\,du = u\Big|_1^{\sqrt{3}} - 2\operatorname{Arctg} u\Big|_1^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1 - 2\left(\operatorname{Arctg}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{deci } \mathcal{A} = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctg}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \operatorname{Arctg}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4},$$

sau

$$\mathcal{A} = -\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4) Am obținut

$$F''(a) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(a+1)^2}\frac{1}{\sqrt{1+2a}} - \frac{1}{2}\frac{1}{a+1}\frac{1}{(1+2a)^{3/2}}$$

și se vede că $F''(a) < 0$ pe mulțimea de definiție.

Pentru a arăta că F'' este strict monotonă pe $\left(\frac{-1}{2}, +\infty\right)$ trebuie să calculăm pe $F'''(a)$. Avem

$$F'''(a) = \frac{1}{(a+1)^3}\frac{1}{\sqrt{1+2a}} + \frac{1}{2}\frac{1}{(a+1)^2}\frac{1}{(1+2a)^{3/2}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{(a+1)^2}\frac{1}{(1+2a)^{3/2}} + \frac{3}{2}\frac{1}{a+1}\frac{1}{(1+2a)^{5/2}};$$

$F'''(a) > 0$ pe $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ deci $F''(a)$ este strict crescătoare pe $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Avem

$$m = \inf F''(a) = \lim_{a \to -\frac{1}{2} + 0} F''(a) = -\infty,$$

$$M = \sup F''(a) = \lim_{a \to \infty} F''(a) = 0.$$

54. Se dă

$$f(x) = \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right|$$

și se cere:

1) să se stabilească mulțimea de definiție;
2) să se studieze variația lui $f(x)$ și să se reprezinte grafic,
3) să se stabilească mulțimea $A \subset R$ în care f' nu ia valori;
4) să se calculeze integrala definită

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, f(x) \, dx.$$

R. 1) Funcția $f(x)$ este periodică de perioadă 2π; o vom studia pe $[0, 2\pi]$. Avem $1 + \cos x = 0$, $x_1 = \pi$; $1 - \cos x = 0$, $x_1' = 0$, $x_2' = 2\pi$, prin urmare mulțimea de definiție este $[0, 2\pi] - \{0, \pi, 2\pi\}$. În general, pe R, mulțimea de definiție este $R - \{k\pi\}$, k întreg.

$$2)\ f(x) = 0,\ \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = +1,\ \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = -1;$$

prima relație ne dă $\cos x = 0$, $x_1'' = \frac{\pi}{2}$, $x_2'' = \frac{3\pi}{2}$; a doua relație este imposibilă.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to \pi} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \to 2\pi} f(x) = +\infty.$$

Graficul admite asimptotele verticale $x = 0$, $x = \pi$ și $x = 2\pi$.

Funcția $f(x)$ este derivabilă pe mulțimea de definiție

$$f'(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \cdot \frac{-\sin x(1 - \cos x) - \sin x(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)^2} = \frac{-2 \sin x}{1 - \cos^2 x};$$

$$f'(x) = -\frac{2}{\sin x};\ f''(x) = \frac{2 \cos x}{\sin^2 x},$$

$$f''(x) = 0,\quad \xi_1 = \frac{\pi}{2},\quad \xi_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Tabloul de variație

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -$		$-\ -\ -\ -$		$+\ +\ +$		$+\ +\ +$		
$f''(x)$	$+\ +\ +\ +\ 0$		$-\ -\ -\ -\ -$		$-\ -\ -\ -\ -\ -$		$0\ +\ +\ +\ +$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul pe $[0, 2\pi]$ este dat în figura 100.

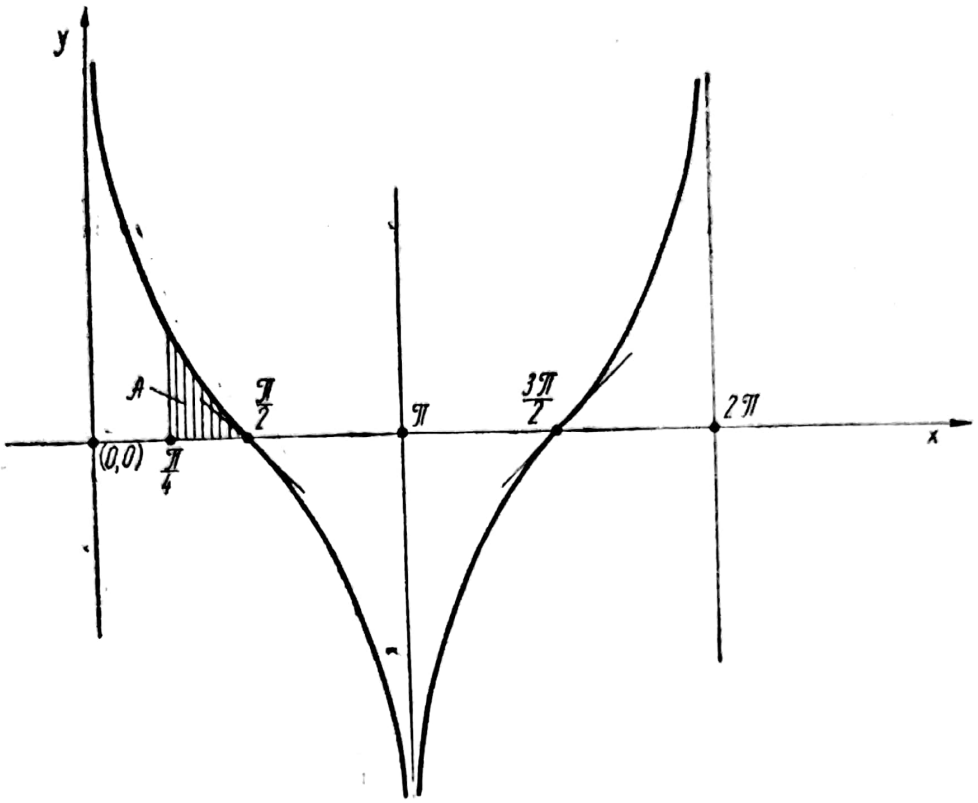


Fig. 100

În trasarea graficului se ține seama că $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$, $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$. Pe R graficul se deduce cu ușurință.

3) Avem $f'(x) = -\frac{2}{\sin x}$; deducem imediat că

$$\sup f'(x) = +\infty, \quad \inf f'(x) = -\infty,$$

însă

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant +1, \text{ deci } \frac{1}{\sin x} \geqslant 1 \text{ și } \frac{1}{\sin x} \leqslant -1 \text{ sau } +2 \leqslant -\frac{2}{\sin x} \leqslant -2;$$

prin urmare pe mulțimea $A = (-2, 2)$, $f'(x)$ nu ia valori.

4) Deoarece pe $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{1+\cos x}{1-\cos x} > 0$, pe acest interval putem scrie

$$\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| = \ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x},$$

deci

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\,d(\cos x).$$

Se impune schimbarea de variabilă $\cos x = u$, care transformă $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \to \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Avem

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \ln \frac{1+u}{1-u}\, du = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \ln (1+u)\, du - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \ln (1-u)\, du$$

dar,

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \ln (1+u)\, du = \Big[(1+u)\ln(1+u) - u\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

și

$$-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \ln (1-u)\, du = \Big[(1-u)\ln(1-u) + u\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

de unde obținem

$$I = \frac{\sqrt{2}+2}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+2}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

55. 1) Să se determine valorile lui x pentru care

$$0 < x < \frac{2x^3 - 9x}{x^2 - 5} < 2x.$$

2) Să se figureze graficul funcției $y = \frac{2x^3 - 9x}{x^2 - 5}$.

3) Să se calculeze aria domeniului situat în semiplanul $x \geqslant 0$ mărginit de graficul precedent și axa Ox.

4) Considerînd același grafic să se discute natura rădăcinilor ecuației

$$2x^3 - \lambda x^2 - 9x + 5\lambda = 0$$

λ fiind un parametru real.

1968, Facultatea de matematică mecanică, București.

R. 1) Trebuie să găsim valorile lui $x > 0$ pentru care

$$x < \frac{2x^3 - 9x}{x^2 - 5} < 2x,$$

sau

$$\frac{2x^3-9x}{x^2-5}-x>0, \qquad \frac{x^3-4x}{x^2-5}>0,$$

şi

$$\frac{2x^3-9x}{x^2-5}-2x<0, \qquad \frac{x}{x^2-5}<0,$$

sau

$$f(x)=(x^3-4x)(x^2-5)>0,\ g(x)=x(x^2-5)<0,\ x>0,$$

studiate în tabloul următor

x	0							2							$\sqrt{5}$							$+\infty$
$f(x)$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$			
$g(x)$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

deci pentru $x\in(0,2)$, $f(x)>0$, $g(x)<0$, $x>0$.

2) Avem

$$y(x)=\frac{2x^3-9x}{x^2-5};$$

$$y(x)=0,\ x_1=-\frac{3}{\sqrt{2}},\ x_2=0,\quad x_3=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Mulţimea de definiţie a lui $y(x)$ este $R-\{-\sqrt{5},\ +\sqrt{5}\}$ deoarece numitorul $x^2-5=0$ pentru $x_2'=-\sqrt{5}$, $x_2'=+\sqrt{5}$.

Graficul admite asimptotele verticale $x=\sqrt{5}$, $x=-\sqrt{5}$.

Asimptota oblică, $y=mx+n$,

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-9x}{x(x^2-5)}=2,\quad m'=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-9x}{x(x^2-5)}=2,$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3-9x}{x^2-5}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-9x-2x^3+10x}{x^2-5}=0;$$

graficul admite asimptota oblică $y=2x$,

$$y'(x)=\frac{(6x^2-9)(x^2-5)-2x(2x^3-9x)}{(x^2-5)^2},$$

$$y'(x)=\frac{2x^4-21x^2+45}{(x^2-5)^2},\ y'(x)=0 \text{ pentru}$$

$$x_1'=-\sqrt{\frac{15}{2}},\ x_2=-\sqrt{3},\ x_3'=\sqrt{3},\ x_4'=\sqrt{\frac{15}{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variație

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{15}{2}}$		$-\sqrt{5}$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{5}$		$\sqrt{\frac{15}{2}}$	$+\infty$
$y'(x)$	$+$	$+$	$+$ 0 $-$	$-$		$-$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$ 0	$-$	$-$	$-$	$-$ 0 $+$ $+$ $+$
$y(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{\frac{15}{2}}\cdot\frac{6}{5}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow 0 \searrow -\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\nearrow 0 \nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow 0 \searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{\frac{15}{2}}\cdot\frac{6}{5}$	$\nearrow +\infty$
		A						B		B'				A'	

Graficul este dat in figura 101.

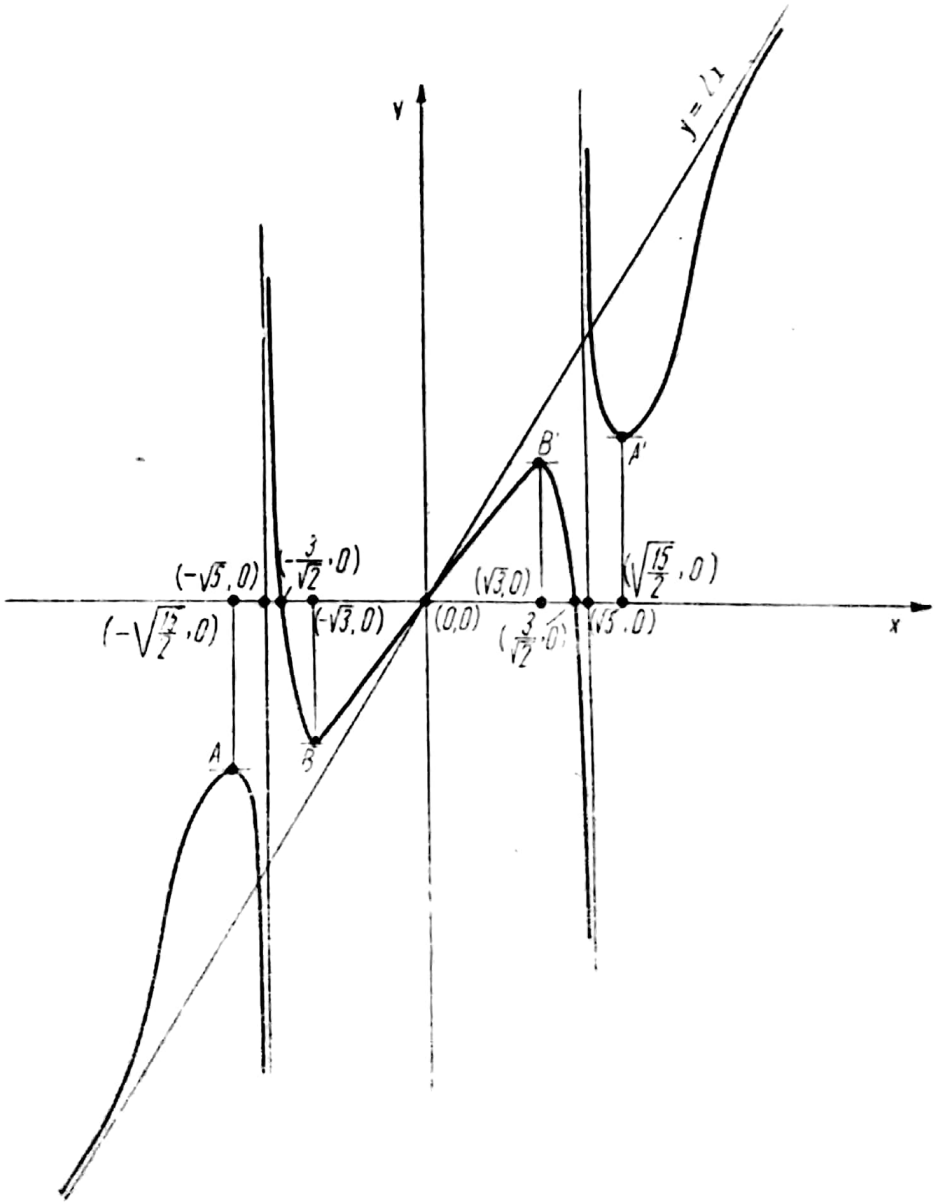


Fig. 101

Scanned with OKEN Scanner

În origine avem $f'(0) = \frac{45}{25} = \frac{9}{5}$.

3) Deoarece pe $\left(0, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ graficul este situat deasupra axei Ox aria $\mathcal{A}$ este dată de integrala definită

$$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \frac{2x^3 - 9x}{x^2 - 5}\,dx = 2\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \frac{x^3}{x^2 - 5}\,dx - 9\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \frac{x}{x^2 - 5}\,dx.$$

Punem $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$ unde,

$$\mathcal{A}_2 = \frac{9}{2}\ln|x^2 - 5|\Big|_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} = -\frac{9}{2}\ln 10,$$

$$\mathcal{A}_1 = 2\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \frac{x^3}{x^2 - 5}\,dx = 2\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \frac{x^3 - 5x + 5x}{x^2 - 5}\,dx = x^2\Big|_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} +$$

$$+ 10\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \frac{x}{x^2 - 5}\,dx = x^2\Big|_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} + 5\ln|x^2 - 5\Big|_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}$$

deci $\mathcal{A}_1 = \frac{9}{2} - 5\ln 10$; obținem astfel

$$\mathcal{A} = \frac{9}{2} - 5\ln 10 + \frac{9}{2}\ln 10 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\ln 10 = \frac{9}{2} - \ln\sqrt{10}.$$

4) Pentru a discuta natura rădăcinilor ecuației

(α) $$2x^3 - \lambda x^2 - 9x + 5\lambda = 0, \quad \lambda \in R,$$

este suficient să observăm că putem scrie

$$\frac{2x^3 - 9x}{x^2 - 5} = \lambda, \quad \lambda \in R,$$

deci dacă intersectăm graficul (fig. 101) cu dreapta variabilă $y = \lambda$ obținem discuția cerută. Să observăm mai întîi că avem $\sqrt{\frac{15}{2}} \cdot \frac{6}{5} > \frac{3}{2}\sqrt{3}$ deoarece $\frac{15}{2} \cdot \frac{36}{25} > \frac{9}{4} \cdot 3$. Conform figurii 101 putem scrie

1') $\lambda < -\frac{6}{5} \cdot \sqrt{\frac{15}{2}}$; ecuația (α) are 3 rădăcini reale

$$x_1 < -\sqrt{\frac{15}{2}}, \; x_2 \in \left(-\sqrt{\frac{15}{2}}, -\sqrt{5}\right), \; x_3 \in \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{5}\right);$$

Scanned with OKEN Scanner

2') $\lambda = -\frac{6}{5}\sqrt{\frac{15}{2}}$, ecuația ($\alpha$) are 3 rădăcini reale din care una dublă: $x_1 = x_2 = -\sqrt{\frac{15}{2}}$, $x_3 \in \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{5}\right)$;

3') $-\frac{6}{5}\sqrt{\frac{15}{2}} < \lambda < -\frac{3}{2}\sqrt{3}$, ecuația ($\alpha$) are o rădăcină reală pozitivă $x_1 \in \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{5}\right)$;

4') $\lambda = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$, ecuația ($\alpha$) are 3 rădăcini reale din care una dublă; $x_1 = x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 \in \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{5}\right)$;

5') $-\frac{3}{2}\sqrt{3} < \lambda < \frac{3}{2}\sqrt{3}$, ecuația ($\alpha$) are 3 rădăcini reale $x_1 \in (-\sqrt{5}, -\sqrt{3})$, $x_2 \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $x_3 \in (\sqrt{3}, \sqrt{5})$;

6') $\lambda = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, ecuația ($\alpha$) are 3 rădăcini reale din care una dublă $x_1 \in \left(-\sqrt{5}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $x_2 = x_3 = \sqrt{3}$;

7') $\frac{3}{2}\sqrt{5} < \lambda < \frac{6}{5}\sqrt{\frac{15}{2}}$, ecuația ($\alpha$) are o rădăcină reală $x_1 \in \left(-\sqrt{5}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$;

8') $\lambda = \frac{6}{5}\sqrt{\frac{15}{2}}$, ecuația ($\alpha$) are 3 rădăcini reale din care una dublă, $x_1 \in \left(-\sqrt{5}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{15}{2}}$;

9') $\lambda > \frac{6}{5}\sqrt{\frac{15}{2}}$, ecuația ($\alpha$) are 3 rădăcini reale $x_1 \in \left(-\sqrt{5}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $x_2 \in \left(\sqrt{5}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $x_3 > \sqrt{\frac{15}{2}}$.

56. Se dă ecuația diferențială

$$2e^{-2x}yy' = \frac{2x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

și se cere:

1) să se integreze;

2) să se determine soluția particulară care satisface condiția inițială $y(0) = 1$;

3) să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția determinată la punctul 2.

Scanned with OKEN Scanner

R. 1) Ecuația diferențială este cu variabile separabile. În adevăr putem scrie

$$2y\,dy = \frac{2x^2+1}{(x^2+x+1)^2}e^{2x}\,dx,$$

sau

$$2dy\,dy = \frac{2(x^2+x+1)-2x-1}{(x^2+x+1)^2}e^{2x}\,dx,$$

deci

$$\int 2y\,dy = \int\left(\frac{2}{x^2+x+1} - \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\right)e^{2x}\,dx,$$

sau

$$y^2 = \frac{e^{2x}}{x^2+x+1} + C,$$

care constituie soluția generală.

2) Pentru $x = 0$, deducem $C + 1 = 1$ deci $C = 0$. Obținem

$$y^2 = \frac{e^{2x}}{x^2+x+1},\quad x \in R,$$

sau

$$y(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x^2+x+1}},\quad x \in R;$$

nu putem lua și cealaltă soluție

$$y = -\frac{e^x}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

deoarece nu satisface condiția $y(0) = +1$.

3) Funcția

$$y(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

are mulțimea de definiție R deoarece $x^2 + x + 1 > 0$ pentru orice $x \in R$.

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0.$$

Graficul admite asimptota orizontală $y = 0$.

$$y'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{e^x(2x+1)}{2(x^2+x+1)^{3/2}},$$

sau

$$y'(x) = \frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)}{2(x^2+x+1)^{3/2}}e^x,\quad x \in R,$$

$$y'(x) = \frac{2x^2+1}{(x^2+x+1)^{3/2}}e^x,\quad x \in R;$$

$y'(x) = 0$, nu are soluții.

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variație

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$y'(x)$	+	+	+	+	+	+	+
$y(x)$	0	↗		1	↗		$+\infty$

Graficul este dat în figura 102.

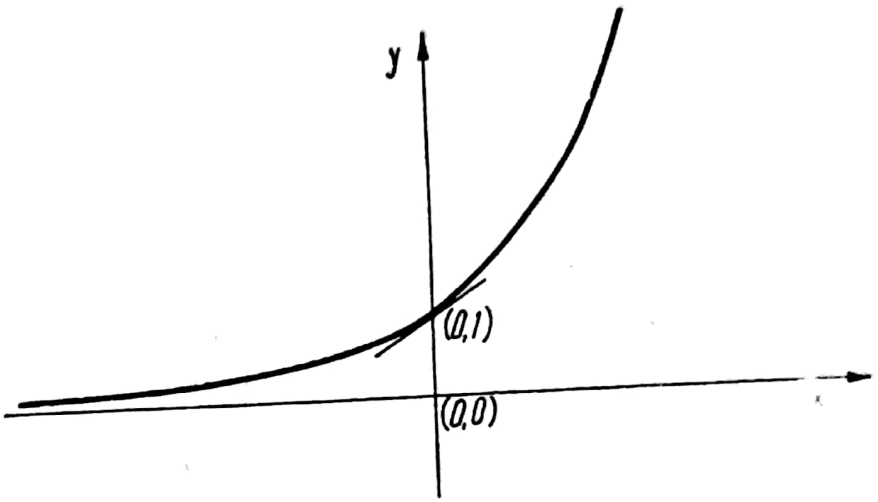


Fig. 102

În punctul (0, 1) graficul are tangenta paralelă cu prima bisectoare a axelor.

57. Un cerc O are diametrul $AB = 2a$. Pe acest diametru se consideră un punct mobil N, astfel încît $AM = x$. Pe segmentele AM și MB — luate ca diametrii — se descriu cercurile O_1 și O_2.

1) Să se afle maximul ariei $S(x)$ a multimii plane cuprinsă între cele trei cercuri.

2) Să se studieze variația și să se construiască graficul funcției

$$f(x) = -\frac{2S(x)}{\pi(x+a)}.$$

1969, Institutul Politehnic, Timișoara.

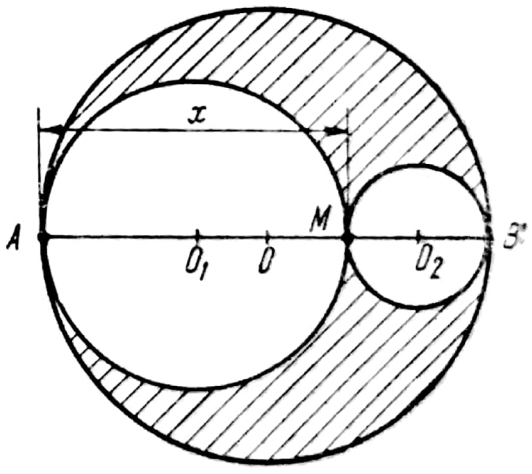


Fig. 103

R. 1) Conform figurii 103 avem $AM = x$, $AB = 2a$, $MB = 2a - x$. Aria S este dată de:

$$S(x) = S_1 - S_2 - S_3,$$

unde $S_1 = \pi a^2$ este aria cercului O, $S_2 = \frac{\pi}{4}x^2$ este aria cercului O_1 și $S_3 = \frac{\pi}{4}(2a-x)^2$ este aria cercului S_2,

$$S(x) = \frac{\pi}{4}[4a^2 - x^2 - (2a-x)^2] = \frac{\pi}{2}x(2a-x),\ x \in [0, 2a].$$

Avem $S(0) = 0$, $S(2a) = 0$, prin urmare S are un maximum în $(0, 2a)$. Calculăm derivata $S'(x)$,

$$S'(x) = \frac{\pi}{2}(2a - x - x), \quad S'(x) = 0, \quad x_1 = a.$$

$S''(x) = -\frac{\pi}{2} < 0$, deci în punctul $x_1 = a$, $S(x)$ are un maximum dat de $S(a) = \frac{\pi}{2}a^2$.

2) Avem

$$f(x) = -\frac{2}{x+a} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} x(2a - x), \quad x \in [0, 2a],$$

sau

$$f(x) = -\frac{x(2a - x)}{x + a}, \quad x \in [0, 2a],$$

$f(x) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2a$; f este continuă pe $[0, 2a]$ și derivabilă. Calculăm pe $f'(x)$.

$$f'(x) = -\frac{(2a - 2x)(x + a) - x(2a - x)}{(x + a)^2} = \frac{x^2 + 2ax - 2a^2}{(x + a)^2},$$

$$f'(x) = 0, \quad x^2 + 2ax - 2a^2 = 0, \quad x_1 = a(-1 + \sqrt{3}), \quad x_2 = a(-1 - \sqrt{3});$$

în intervalul $[0, 2a]$ se află $x_1 = a(\sqrt{3} - 1)$.

Tabloul de variație

x	0		$a(\sqrt{3}-1)$		$2a$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -$		0	$+\ +\ +\ +\ +\ +$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2a(2-\sqrt{3})$	$\nearrow$	0
			A		

$$f(a(\sqrt{3} - 1)) = \frac{a(\sqrt{3} - 1)(2 - \sqrt{3} + 1)a}{a\sqrt{3}} = -a(\sqrt{3} - 1)^2 = -2a(2 - \sqrt{3})$$

Graficul este dat în figura 104.

În trasarea graficului se ține seama că $f'(0 + 0) = -2$, $f'(2a - 0) = \frac{2}{3}$.

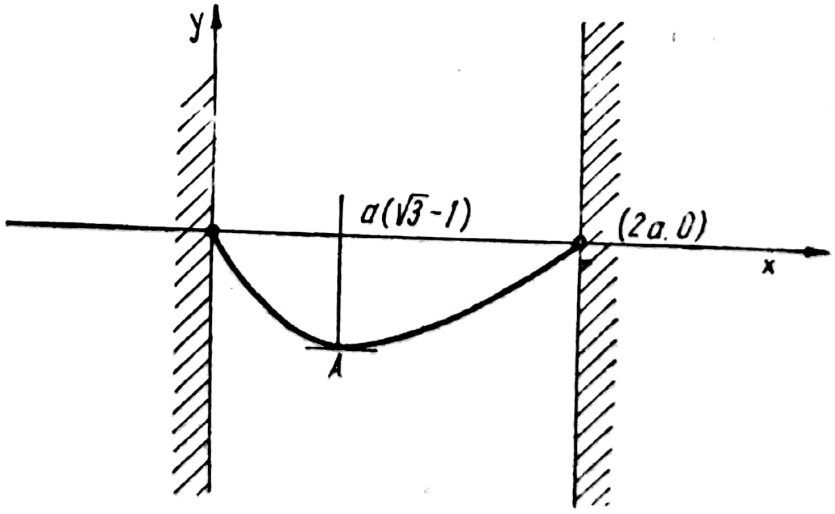


Fig. 104

58. Se dă

$$f(x) = \ln|x+4| - \frac{x^2+2x-4}{x^2+3x-4}$$

și se cere:

1) mulțimea de definiție;

2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;

3) să se calculeze aria domeniului plan mărginit de grafic, axa Ox și dreptele $x=-1$, $x=0$;

4) să se discute după parametrul λ numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x)=\lambda$.

R. 1) Funcția $\ln|x+4|$ există pe $R-\{-4\}$ iar funcția rațională nu este definită în punctele care anulează numitorul. Avem $x^2+3x-4=0$, $x_1=-4$, $x_2=$ deci mulțimea de definiție a lui f este $R-\{-4, 1\}$.

2) Graficul admite asimptotele verticale $x=-4$ și $x=1$ nu admite asimptote oblice. Numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$\ln|x+4| - \frac{x^2+2x-4}{x^2+3x-4} = 0$$

cît și intervalele în care se găsesc le vom deduce din grafic. Avem

$$\lim_{x\to-4} \ln|x+4| = -\infty,$$

și

$$\lim_{x\to-4-0} \frac{x^2+2x-4}{x^2+3x-4} = +\infty \qquad \lim_{x\to-4+0} \frac{x^2+2x-4}{x^2+3x-4} = -\infty,$$

de unde rezultă că

$$\lim_{x\to-4-0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-4+} f(x) = +\infty.$$

Calculăm derivata lui f

$$f'(x) = \frac{1}{x+4} - \frac{2(x+1)(x^2+3x-4)-(x^2+2x-4)(2x+3)}{(x^2+3x-4)^2},$$

deci

$$f'(x) = \frac{x(x^2+x-7)}{(x-1)^2(x+4)^2}, \quad x\neq+1, \quad x\neq-4;$$

$$f'(x)=0, \quad x_1=0, \quad x_2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{29}), \quad x_3=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{29}).$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$		-4		$-\frac{1+\sqrt{29}}{2}\simeq 3{,}2$		0		1		$\frac{-1+\sqrt{29}}{2}\simeq 2{,}2$		$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -$		$-\ -\ -$		0		$+\ +\ +$		0		$-\ -\ -$		0		$+\ +\ +$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow \ln 0{,}8-0{,}03$		$\nearrow \ln 4-1$		$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow \ln 6{,}2-0{,}70$		$\nearrow +\infty$	
				A			B			C			

Scanned with OKEN Scanner

Graficul este dat în figura 105.

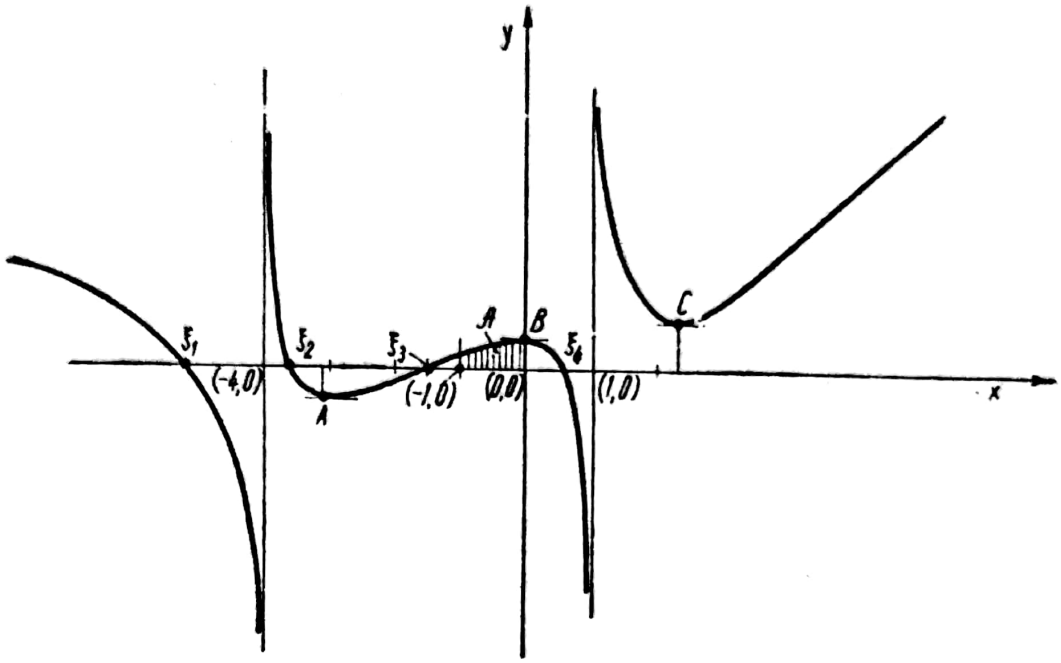


Fig. 105

Din grafic rezultă că ecuația

$$\ln|x+4| = \frac{x^2+2x-4}{x^2+3x-4}$$

are patru rădăcini reale, $\xi_1 < -4$, $\xi_2 \in \left(-4, -\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$, $\xi_3 \in \left(-\frac{1+\sqrt{29}}{2}, 0\right)$ și $\xi_4 \in (0, 1)$.

3) Aria cerută este dată de integrala definită

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} \left[\ln|x+4| - \frac{x^2+2x-4}{x^2+3x-4}\right] dx,$$

deoarece pe acest interval $f(x) > 0$. În adevăr

$$f(-1) = \ln 3 - \frac{5}{6} > 0 \text{ și pe } (-1, 0)$$

derivata este pozitivă deci f este crescătoare. Pentru că $\ln|x+4| = \ln(x+4)$, $x \in (-1, 0)$ avem

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} \ln(x+4)\,dx - \int_{-1}^{0} \frac{x^2+2x-4}{x^2+3x-4}\,dx = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2;$$

$$\mathcal{A}_1 = \int_{-1}^{0} \ln(x+4)\,dx = (x+4)\ln(x+4)\Big|_{-1}^{0} - x\Big|_{-1}^{0},$$

$$\mathcal{A}_1 = 4\ln 4 - 3\ln 3 - 1.$$

Pentru calculul celei de a doua integrale scriem

$$\frac{x^2+2x-4}{x^2+3x-4}=1-\frac{x}{(x-1)(x+4)}=1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{4}{5}\frac{1}{x+4}$$

deci

$$\mathcal{A}_2=-\int_{-1}^{0}\left(1-\frac{1}{5}\frac{1}{x-1}-\frac{4}{5}\frac{1}{x+4}\right)dx=-x\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{5}\ln|x-1|\Big|_{-1}^{0}+$$

$$+\frac{4}{5}\ln|x+4|\Big|_{-1}^{0}=-1-\frac{1}{5}\ln 2+\frac{4}{5}\ln\frac{4}{3}$$

și

$$\mathcal{A}=\frac{47}{5}\ln 2-\frac{19}{5}\ln 3-2.$$

4) Dacă tăiem graficul cu dreapta variabilă $y=\lambda$ avem următoarele rezultate:

a) $-\infty<\lambda<f\left(-\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$,

ecuația $f(x)=\lambda$ are două rădăcini reale $x_1<-4$ și $x_2\in(0,1)$;

b) $\lambda=f\left(-\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$,

ecuația $f(x)=\lambda$ are 4 rădăcini reale, din care una dublă, anume $x_1<-4$, $x_2\in(0,1)$, $x_3=x_4=-\frac{1+\sqrt{29}}{2}$;

c) $f\left(-\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)<\lambda<\ln 4-1$,

ecuația are 4 rădăcini reale, $x_1<-4$, $x_2\in(0,1)$, $x_3\in\left(-4,-\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$, $x_4\in\left(-\frac{1+\sqrt{29}}{2},0\right)$;

d) $\lambda=\ln 4-1$, ecuația are 4 rădăcini reale din care una dublă, anume $x_1<-4$, $x_2\in(0,1)$, $x_3=x_4=0$;

e) $\ln 4-1<\lambda<f\left(\frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right)$, ecuația are două rădăcini reale $x_1<-4$, $x_2\in\left(-4,-\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$;

f) $\lambda=f\left(\frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right)$, ecuația are 4 rădăcini reale din care una dublă, anume $x_1<-4$, $x_2\in\left(-4,-\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$, $x_3=x_4=\frac{-1+\sqrt{29}}{2}$;

g) $\lambda<f\left(\frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right)$, ecuația $f(x)=\lambda$ are patru rădăcini reale $x_1<-4$, $x_2\in\left(-4-\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$, $x_3\in\left(1,\frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right)$, $x_4>\frac{-1+\sqrt{29}}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

59. Se dă funcţia $f(a)$ definită de integrala

$$f(a) = a\int_0^1 \frac{x^2 - a^2 - 2}{(x+a)^2} e^{-ax} dx + 1, \quad a \geqslant 2$$

şi se cere:

1) să se determine $f(a)$ şi mulţimea ei maximă de definiţie;

2) să se studieze variaţia lui f şi să se reprezinte grafic; să se scrie ecuaţiile tangentelor la grafic în punctele în care graficul intersectează axele de coordonate;

3) să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului cît şi intervalele în care se găsesc.

R. 1) Avem

$$a\frac{x^2 - a^2 - 2}{(x+a)^2} = a\frac{x-a}{x+a} - \frac{2a}{(x+a)^2}$$

şi pentru că

$$[u(x)\, e^{v(x)}]' = [u'(x) + u(x)\, v'(x)]\, e^{(vx)},$$

observăm că

$$\left(\frac{x-a}{x+a}\right)' = \frac{2a}{(x+a)^2}, \quad (e^{-ax})' = -ae^{-ax},$$

deci

$$\frac{a(x^2 - a^2 - 2)}{(x+a)^2} e^{-ax}\, dx = d\left[-\frac{x-a}{x+a} e^{-ax}\right],$$

$$f(a) = -\int_0^1 \frac{d}{dx}\left[\frac{x-a}{x+a} e^{-ax}\right] dx + 1 = -\frac{x-a}{x+a} e^{-ax}\Big|_0^1 + 1,$$

sau

$$f(a) = \frac{a-1}{a+1} e^{-a}, \quad a \geqslant 2.$$

Mulţimea maximă de definiţie a lui f astfel obţinut este $R - \{-1\}$.

2) $f(a) = 0$, $a_1 = 1$; $\lim\limits_{a\to\infty} f(a) = 0$, $\lim\limits_{a\to-\infty} f(a) = +\infty$.

Graficul admite asimptota verticală $a = -1$ şi asimptota orizontală axa absciselor.

$$\lim_{a\to-1-0} f(a) = +\infty, \quad \lim_{a\to-1+0} f(a) = -\infty.$$

Graficul nu are asimptote oblice.

$$f'(a) = \left[\frac{(a+1)-(a-1)}{(a+1)^2} - \frac{a-1}{a+1}\right] e^{-a},$$

$$f'(a) = \frac{2-(a+1)(a-1)}{(a+1)^2} e^{-a} = \frac{3-a^2}{(a+1)^2} e^{-a};$$

$$f'(a) = 0, \quad a_1' = -\sqrt{3}, \quad a_2' = \sqrt{3}.$$

$$f''(a) = \left[\frac{-2a(a+1) - 2(3-a^2)}{(a+1)^3} - \frac{3-a^2}{(a+1)^2}\right] e^{-a},$$

$$f''(a) = \frac{(a+1)(a^2-3) - 2(a+3)}{(a+1)^3} e^{-a} = \frac{a^3 + a^2 - 5a - 9}{(a+1)^3} e^{-a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variație

a	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(a)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(a)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}e^{+\sqrt{3}}$ (A)	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}e^{-\sqrt{3}}$ (B)	$\searrow$	0

Graficul este dat în figura 106. În punctul $(0, -1)$ tangenta la grafic este dată de

$$y + 1 = 3x,$$

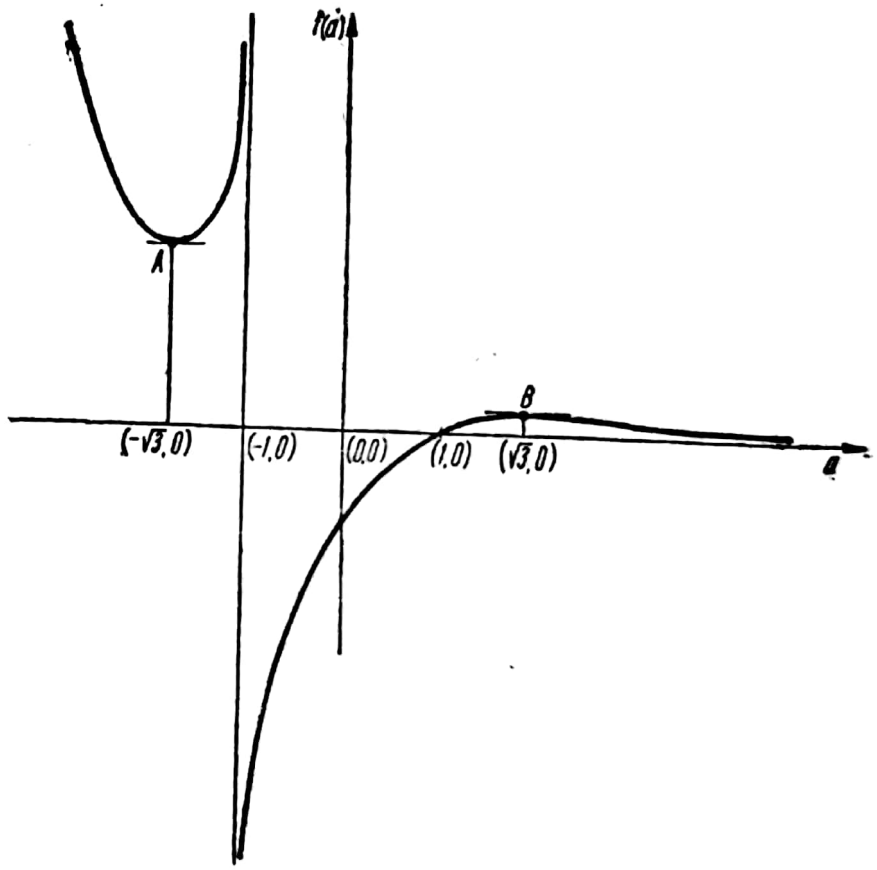


Fig. 106

deoarece $f'(0) = 3$. În punctul $(1, 0)$, tangenta la grafic are ecuația

$$2ey = x - 1.$$

Pentru a obține graficul lui $f(a)$ pentru $a \geqslant 2$ este suficient ca în figura 106 să considerăm partea din grafic pentru $a \geqslant 2$.

3) Numărul de puncte de inflexiune este dat de numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f''(a) = 0$, sau

$$a^3 + a^2 - 5a - 9 = 0, \qquad a \neq -1.$$

Anulăm derivata

$$3a^2 + 2a - 5 = 0, \qquad a_1 = 1, \; a_2 = -\frac{5}{3}.$$

Formăm șirul lui Rolle

$f(-\infty)$	$f\left(-\frac{5}{3}\right)$	$f(1)$	$f(+\infty)$
$-$	$-$	$-$	$+$

$$f(+1) = -12, \; f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{125}{27} + \frac{25}{9} + \frac{25}{3} - 9 = -\frac{125}{27} + \frac{19}{9} < 0.$$

Graficul are un singur punct de inflexiune pentru x în intervalul $(2, 3)$.

60. Se dă șirul cu termenul general

$$u_n = \frac{n(a-1)+1}{n(a+2)-1}\left(1 + \frac{1}{na}\right)^n, \quad n = 1,2, \ldots$$

unde a este un parametru real.

1) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Discuție după a.

2) Dacă notăm cu

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} u_n$$

să se determine mulțimea de definiție a lui f.

3) Să se studieze variația și să se reprezinte grafic

$$y = f(a).$$

4) Să se găsească marginile superioară și inferioară ale lui $f'(a)$ pe $(2, +\infty)$.

R. 1) Putem scrie

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(a-1)+1}{n(a+2)-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{na}\right)^{na}\right]^{\frac{1}{a}}.$$

Trebuie să cerem de la început ca $a \neq 0$, și $a \neq \frac{1}{n} - 2$ pentru că u_n nu este definit în aceste situații. Pentru $a \neq 0$ avem

$$\lim_{a\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{na}\right)^{na}\right]^{\frac{1}{a}} = e^{\frac{1}{a}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rămîne să ne mai ocupăm de prima limită din partea a doua. Avem mai multe cazuri de considerat

1') $a = 1$; în această situație

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(a-1)+1}{n(a+2)-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n-1} = 0.$$

2') $a = -2$; avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(a-1)+1}{n(a+2)-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n+1}{-1} = +\infty.$$

3') $a \neq -2$, $a \neq 1$, $a \neq \frac{1}{n} - 2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(a-1)+1}{n(a+2)-1} = \frac{a-1}{a+2},$$

deci pentru $a \neq -2$, $a \neq 0$, $a \neq \frac{1}{n} - 2$ avem

$$f(a) = \frac{a-1}{a+2} e^{\frac{1}{a}}, \quad f(1) = 0.$$

2) Mulțimea de definiție a lui $f(a)$ este $R - \left\{-2,\ 0\ \ \frac{1}{n} - 2\right\}$, $n \in N$ și coincide cu rezultatul discuției de la punctul 1.

3) Avem

$$\lim_{a\to -2+0} f(a) = -\infty, \quad \lim_{a\to -2-0} f(a) = +\infty,$$

deci graficul admite asimptota verticală $a = -2$.
Avem

$$\lim_{a\to 0+} f(a) = -\infty, \quad \lim_{a\to 0-} f(a) = 0,$$

prin urmare graficul admite pe $a = 0$ ca asimptotă verticală. Avem

$$\lim_{a\to\infty} f(a) = \lim_{a\to\infty} \frac{a-1}{a+2} e^{\frac{1}{a}} = 1, \quad \lim_{a\to -\infty} f(a) = 1,$$

deci graficul admite asimptota orizontală $f(a) = 1$.

Graficul nu admite asimptote oblice.

$$f(a) = 0, \qquad a_1 = 1.$$

Mulțimea de derivabilitate coincide cu mulțimea de definiție. Avem

$$f'(a) = \left[\frac{a+2-(a-1)}{(a+2)^2} - \frac{a-1}{a+2}\frac{1}{a^2}\right] e^{\frac{1}{a}} = \frac{2a^2-a+2}{a^2(a+2)^2} e^{\frac{1}{a}};$$

$f'(a) = 0$, $2a^2 - a + 2 = 0$, rădăcini imaginare.

Tabloul de variație

a	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(a)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(a)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$-\infty$	$\nearrow$	0 $\nearrow$	1

Graficul este dat în figura 107.

În trasarea graficului se ține seama că $f'(0-) = 0$, $f'(1) = \frac{e}{3}$. În fig. 107 pe $(-2, 0)$ nu s-au scos punctele $a_n = \frac{1}{n} - 2$ în care f nu este definită.

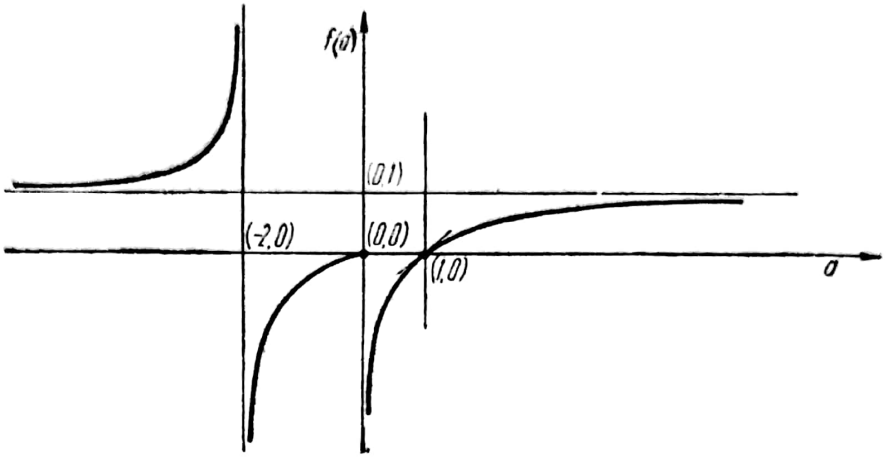


Fig. 107

4) Avem

$$f'(a) = \left[\frac{3}{(a+2)^3} + \frac{1}{(a+2)a^2} - \frac{1}{a(a+2)}\right] e^{\frac{1}{a}}$$

și

$$f''(a) = \left[\frac{-6}{(a+2)^3} - \frac{1}{(a+2)^2a^2} - \frac{1}{(a+2)a^3} + \frac{1}{a^2(a+2)} + \frac{1}{a(a+2)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{(a+2)^2a^2} - \frac{1}{(a+2)a^4}\right] e^{\frac{1}{a}};$$

însă pe $[2, +\infty)$ avem

$$\frac{-6}{(a+2)^3} + \frac{1}{a^2(a+2)} + \frac{1}{a(a+2)^2} = \frac{-6a^2 + (a+2)^2 + a(a+2)}{a^2(a+2)^3} =$$

$$= \frac{-4a^2 + 6a + 4}{a^2(a+2)^3} = \frac{-2(a-2)(2a+1)}{a^2(a+2)^3} < 0.$$

Prin urmare pe $[2, +\infty)$ $f''(a) < 0$. Funcția $f'(a) > 0$ pe $[2, +\infty)$ și este strict descrescătoare deci

$$\sup f'(a) = f'(2) = \frac{1}{8}\sqrt{e},$$

$$\inf f'(a) = \lim_{a \to \infty} f'(a) = 0.$$

61. 1) Să se rezolve ecuația

$$\sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) = 1.$$

2) Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) - 1, \qquad 1 \leqslant x \leqslant e^2.$$

3) Să se calculeze aria domeniului situat deasupra axei Ox, mărginit de graficul precedent și de axa Ox.

4) Să se arate că $f(xe^2) = f(x)$ pentru orice $x > 0$. Cum se poate folosi această proprietate pentru a studia variația funcției $f(x)$ pe semiaxa $(0, \infty)$?

1967, Facultatea de matematică mecanică, București.

R. 1) Avem $\sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) = 1$ pentru $\pi \ln x = 2k\pi$, $\pi \ln x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ deci ecuația are o infinitate de soluții date de

$$x_k = e^{2k}, \quad x_k' = \sqrt{e} \cdot e^{2k}, \quad k = 0, -1, +1, \ldots$$

2) În intervalul $[1, e^2]$ ecuația $f(x) = 0$ are rădăcinile

$$x_1 = 1, \quad x_2 = e^2, \quad x_3 = \sqrt{e};$$

$f(x)$ este derivabilă pe $[1, e^2]$. Avem

$$f'(x) = \frac{\pi}{x}\cos(\pi \ln x) - \frac{\pi}{x}\sin(\pi \ln x),$$

sau

$$f'(x) = \frac{\pi}{x}[\cos(\pi \ln x) - \sin(\pi \ln x)].$$

$$f'(x) = 0, \cos(\pi \ln x) = \sin(\pi \ln x),$$

cu soluțiile $\pi \ln x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$, $\pi \ln x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4}$

sau $$x_k = \sqrt[4]{e}\, e^{2k}, \quad x_k' = \sqrt[4]{e^5}\, e^2, \quad k = 0, -1, +1, \ldots;$$

în intervalul $[1, e^2]$ sînt admise soluțiile

$$x_1' = \sqrt[4]{e}, \qquad x_2' = \sqrt[4]{e^5}$$

$$f''(x) = -\frac{\pi}{x^2}[\cos(\pi \ln x) - \sin(\pi \ln x)] +$$

$$+ \frac{\pi^2}{x^2}[-\sin(\pi \ln x) - \cos(\pi \ln x)],$$

deci

$$f''(x) = -\frac{\pi}{x^2}[(\pi + 1)\cos(\pi \ln x) + (\pi - 1)\sin(\pi \ln x)],$$

$$f''(x) = 0, \ (\pi + 1)\cos(\pi \ln x) + (\pi - 1)\sin(\pi \ln x) = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\operatorname{tg}(\pi \ln x) = -\frac{\pi+1}{\pi-1}, \quad \pi \ln x = \operatorname{Arctg}\frac{\pi-1}{\pi+1},$$

de unde rezultă x.

Tabloul de variație

x	1			$\sqrt[4]{e}$			$\sqrt{e}$			e			$\sqrt[4]{e^5}$					e^2
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	-2	$\searrow$		$-\sqrt{2}-1$		$\nearrow$			0
			A max										B min					

În trasarea graficului se ține seama că

$$f'(1+0) = \pi, \quad f'(e^2-0) = \frac{\pi}{e^2}, \quad f'(\sqrt{e}) = -\frac{\pi}{\sqrt{e}}.$$

Graficul este dat în figura 108.

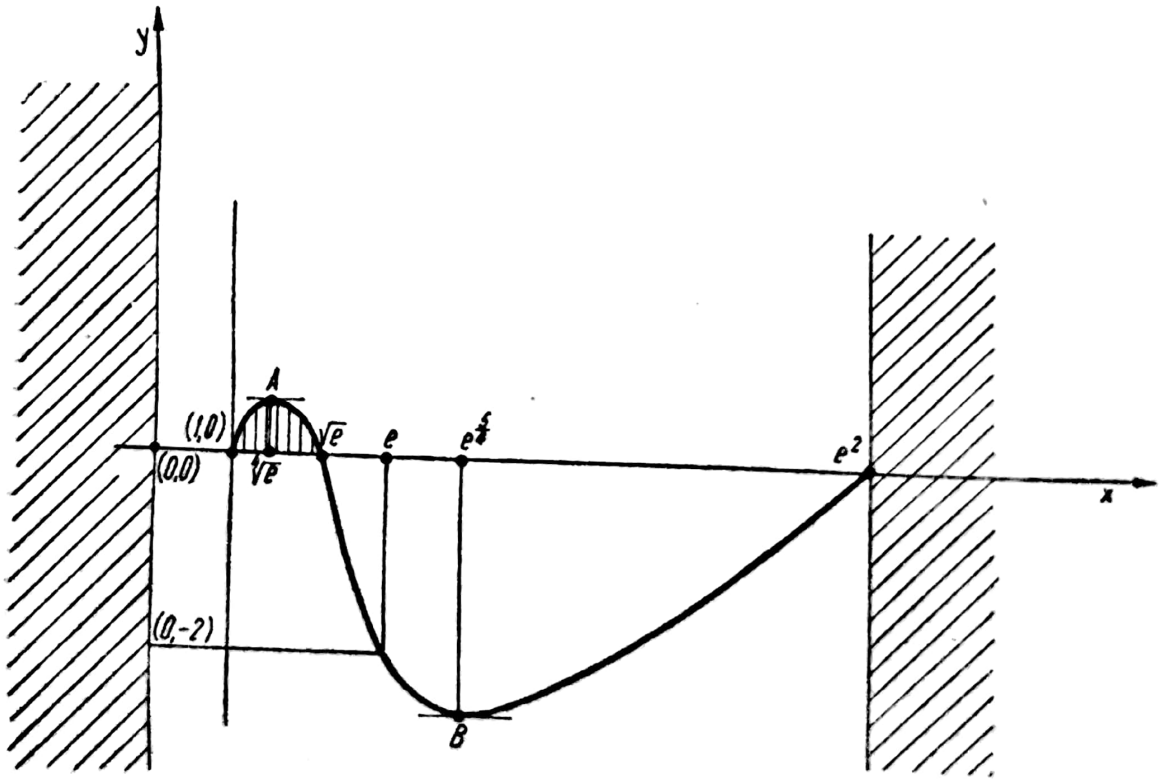


Fig. 108

3) Conform figurii 108 în intervalul $(1, \sqrt{e})$ graficul lui $f(x)$ este situat deasupra axei Ox, deci aria cerută este dată de integrala definită

$$\mathcal{A} = \int_1^{\sqrt{e}} [\cos(\pi \ln x) + \sin(\pi \ln x) - 1]\, dx.$$

Avem, prin integrare prin părți,

$$\mathcal{A}_1 = \int_1^{\sqrt{e}} \cos(\pi \ln x)\, dx = x \cos(\pi \ln x) \Big|_1^{\sqrt{e}} + \pi \int_1^{\sqrt{e}} \sin(\pi \ln x)\, dx,$$

$$\cos(\pi \ln x) = u,\ du = \frac{-\pi}{x} \sin(\pi \ln x)\, dx,\ dv = dx,\ v = x;$$

obținem

$$x \cos(\pi \ln x) \Big|_1^{\sqrt{e}} = 1;$$

notăm

$$\mathcal{A}_1^* = \pi \int_1^{\sqrt{e}} \sin(\pi \ln x)\, dx,$$

pe care o integrăm tot prin părți; $\sin(\pi \ln x) = u,\ dv = dx,$

$$du = \frac{\pi}{x} \cos(\pi \ln x),\ v = x,\ \text{deci}$$

$$\mathcal{A}_1 = \pi x \sin(\pi \ln x) \Big|_1^{\sqrt{e}} - \pi^2 \int_1^{\sqrt{e}} \cos(\pi \ln x)\, dx.$$

Am obținut relația

$$\mathcal{A}_1 = 1 + \pi \sqrt{e} - \pi^2 \mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_1 = \frac{\pi \sqrt{e} + 1}{1 + \pi^2}.$$

Din relația

$$\mathcal{A}_1 = 1 + \pi \int_1^{\sqrt{e}} \sin(\pi \ln x)\, dx,$$

rezultă

$$\mathcal{A}_2 = \int_1^{\sqrt{e}} \sin(\pi \ln x)\, dx = \frac{\pi(\sqrt{e} - \pi)}{1 + \pi^2};$$

deci

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - x \Big|_1^{\sqrt{e}} = \frac{\pi \sqrt{e} + 1}{1 + \pi^2} + \frac{\pi(\sqrt{e} - \pi)}{1 + \pi^2} + 1 - \sqrt{e}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4) Pentru orice $x > 0$ avem

$$f(e^2x) = \cos[\pi \ln(e^2x)] + \sin[\pi \ln(e^2x)] - 1 =$$

$$= \cos(\pi \ln x + 2\pi) + \sin(\pi \ln x + 2\pi) - 1 = f(x),$$

deoarece

$$\pi \ln(e^2x) = \pi(\ln e^2 + \ln x) = 2\pi + \ln x;$$

de aici rezultă că

$$f(x) = f(x\,e^{2k}),\ k = 0, -1, +1, -2, +2, \ldots$$

deci pe intervalul $[e^{2k}, e^{2k+2}]$, avem

$$f(x) = f(x\,e^{2k}),\quad x \in [1, e^2],$$

de unde rezultă că pe intervalul $[e^{2k}, e^{2k+2}]$ graficul lui $f(x)$ se obține din graficul lui pe $[1, e^2]$, prin corespondența

$$x \to e^{2k}x,\qquad x \in [1, e^2],$$

$$f(x) \to f(e^{2k}x) = f(x).$$

Acest rezultat este valabil și pentru orice k întreg.

În figura 109 am schițat graficul lui f pe $(0, +\infty)$.

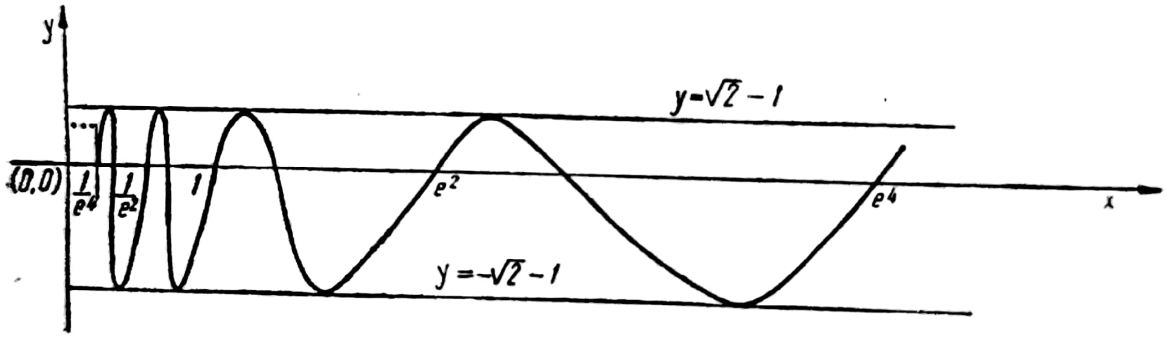


Fig. 109

62. Se dă

$$f(x) = |x + 1|^{x-1}$$

și se cere:

1) mulțimea de definiție și mulțimile de continuitate și derivabilitate;

2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;

3) să se aproximeze aria domeniului plan cuprins între grafic, axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = 1$, folosind formula de aproximare a trapezelor cu $n = 5$.

R. 1) Funcția $f(x)$ fiind exprimată printr-o exponențială, și cum exponențiala cere ca baza să fie strict pozitivă, trebuie să avem $|x+1|>0$ deci $x \neq -1$ În adevăr putem scrie și

$$|x+1|^{x-1} = e^{(x-1)\ln|x+1|},$$

și funcția din partea a doua există pe $R-\{-1\}$, care este mulțimea de definiție a lui $f(x)$.

Calculăm limita lui $f(x)$ în punctul $x=-1$. Avem

$$(\alpha) \qquad \lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} e^{(x-1)\ln|x+1|} = +\infty.$$

Funcția f este continuă și derivabilă pe $R-\{-1\}$. În punctul $x=-1$ nu se pune problema continuității, deoarece în acest punct $f(x)$ nu este definită.

2) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

deci graficul admite asimptota orizontală $y=0$. Din (α) se deduce că graficul admite asimptota verticală $x=-1$.

$$f'(x) = \left(\ln|x+1| + \frac{x-1}{x+1}\right) e^{(x-1)\ln|x+1|},$$

$$f'(x) = 0, \quad \ln|x+1| + \frac{x-1}{x+1} = 0.$$

Reprezentăm pe același sistem de axe în figura 110 graficul funcțiilor

$$y_1 = \ln|x+1|, \quad y_2 = -\frac{x-1}{x+1},$$

de unde deducem că $f'(x)=0$ pentru $\xi \in (0,\ 1)$.

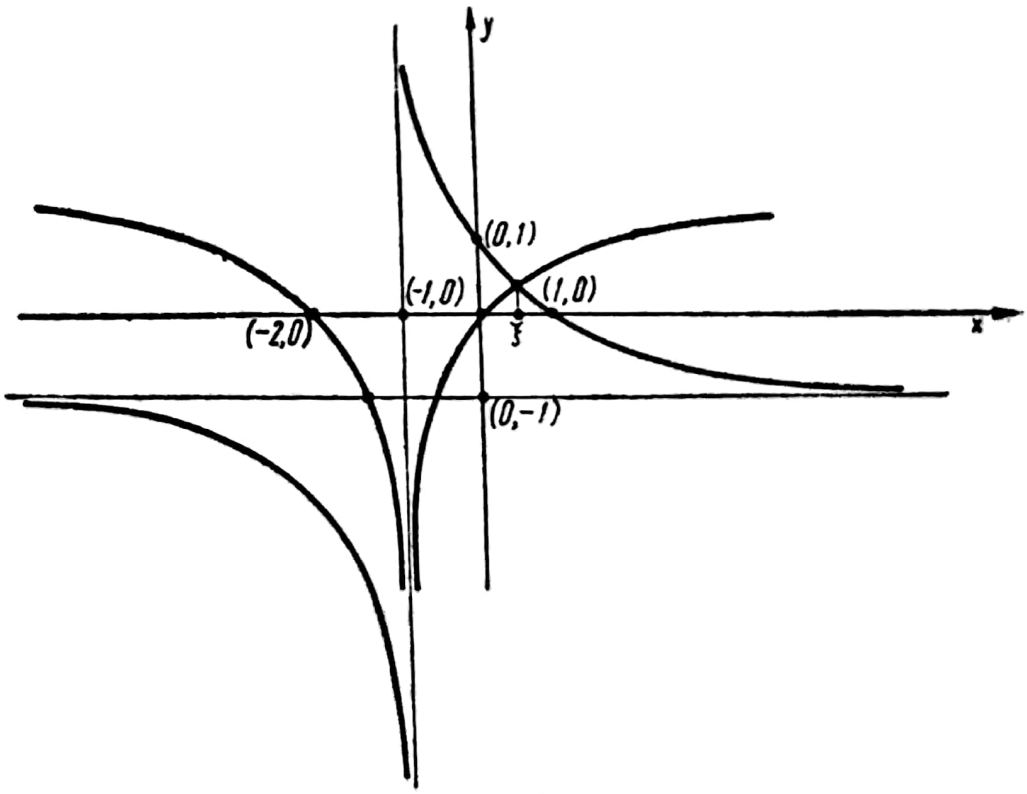


Fig. 110

Tabloul de variație

x	$-\infty$		-1		0		ξ		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$	$+ + + + +$		$- - -$		$- -$	0	$+ +$		$+ + + + +$		
$f(x)$	0	$\nearrow +\infty$	$+\infty$	$\searrow 1$	$\searrow$	$f(\xi)$ A	$\nearrow$	1	$\nearrow$		$+\infty$

$$f(\xi) = e^{(\xi-1)\frac{1-\xi}{1+\xi}} = e^{-\frac{(1-\xi)^2}{1+\xi}} > 0,\ \xi \simeq \frac{1}{2},\ f(\xi) \simeq e^{-\frac{1}{6}}.$$

În trasarea graficului se ține seama că

$$f'(0) = -1,\ f'(1) = \ln 2.$$

Graficul este dat în figura 111.

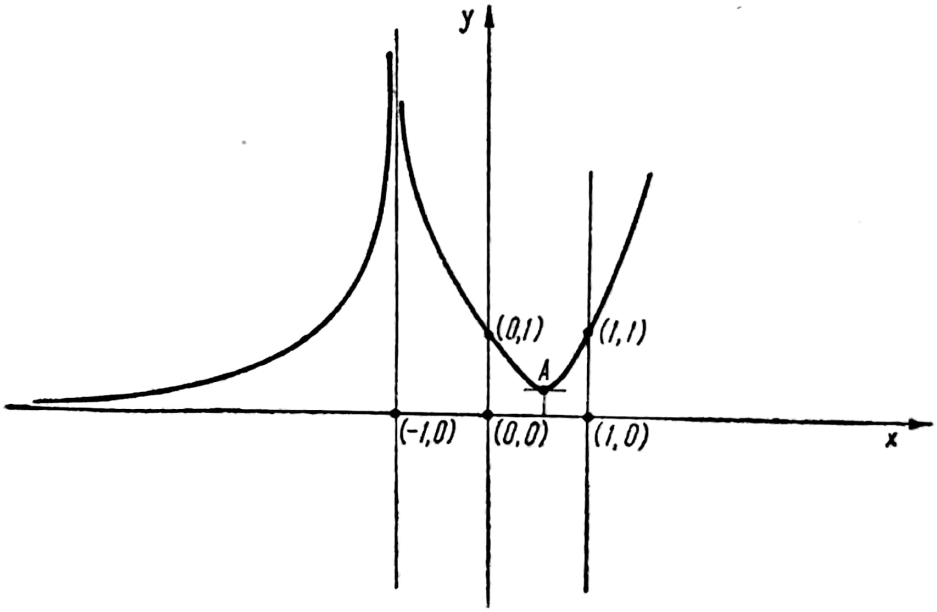


Fig. 111

3) Pentru $n = 5$ avem punctele de diviziune

$$x_0 = 0,\quad x_1 = \frac{1}{5},\quad x_2 = \frac{2}{5},\ x_3 = \frac{3}{5},\quad x_4 = \frac{4}{5},\ x_5 = 1.$$

Formula de aproximare este

$$\mathcal{A} \simeq \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})) + f(b)\right].$$

În cazul nostru $n = 5$, $b = 1$, $a = 0$ deci $\frac{b-a}{2n} = \frac{1}{10}$

$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{6}{5}\right)^{-\frac{4}{5}}, \quad f\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{7}{5}\right)^{-\frac{3}{5}},$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{8}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}, \quad f\left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{9}{5}\right)^{-\frac{1}{5}}, \quad f(1) = 1,$$

deci

$$\mathcal{A} = \frac{1}{5}\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{5}{4}} + \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{5}{3}} + \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{5}{1}}\right].$$

63. Se dă

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{1}{1+x} + \sqrt{x(2+x)}$$

și se cere:

1) mulțimea de definiție;
2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;
3) să se găsească marginile lui $f'(x)$ pe $(0, +\infty)$;
4) să se calculeze aria domeniului plan cuprins între graficul curbei, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$.

R. 1) Mulțimea de definiție a lui $f(x)$ se obține intersectînd mulțimile de definiție ale lui $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{1+x}$ și $\sqrt{x(2+x)}$. Funcția $g(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x+1}$ există pentru valorile lui x care satisfac inegalitățile

$$-1 \leqslant \frac{1}{x+1} \leqslant 1 \quad \text{sau} \quad \frac{-x}{x+1} \leqslant 0, \quad \frac{x+2}{x+1} \geqslant 0,$$

prima inegalitate dă $x \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$ iar a doua inegalitate $x \in (-\infty, -2] \cup (-1, +\infty)$ deci mulțimea de definiție a lui $g(x)$ este $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$.

Se observă că aceiași mulțime de definiție are și $h(x) = \sqrt{x(2+x)}$ deci $f(x)$ este definită pe $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$.

2) Numărul rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$ cît și intervalele în care se găsesc le vom deduce din grafic. Avem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -1.$$

Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{Arcsin} \frac{1}{1+x} = 0, \text{ urmează că}$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to\infty} [\sqrt{x(2+x)} - x] = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x(2+x)} + x} = 1.$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty} [\sqrt{x(2+x)} + x] = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x} + x} = -1.$$

Prin urmare graficul admite asimptotele oblice

$$y = x + 1, \quad x = -x - 1.$$

Funcția $f(x)$ este derivabilă pe mulțimea de definiție

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{\sqrt{x(x+2)}},$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x(2+x)}} \frac{|x+1|}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{\sqrt{x(x+2)}},$$

deci

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2-1}{(x+1)\sqrt{x(2+x)}}, & x+1>0, \\ \dfrac{(x+1)^2+1}{(x+1)\sqrt{x(x+2)}}, & x+1<0, \end{cases}$$

$f'(x) = 0$, $x_1' = 0$, $x_2' = -2$ ($x_3' = -2$ nu aparține mulțimii $x+1>0$). În trasarea graficului ținem seama că $f'(-2-0) = -\infty$, $f'(0+) = 0$.

Graficul arată că ecuația $f(x) = 0$ are o singură rădăcină reală $\xi < -2$.

Tabloul de variație

x	$-\infty$						-2		0				$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$				$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$					$-\frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{2}$				$+\infty$

Luăm pentru Arcsin determinarea principală, deci cu mulțimea valorilor $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Graficul este dat în figura 112.

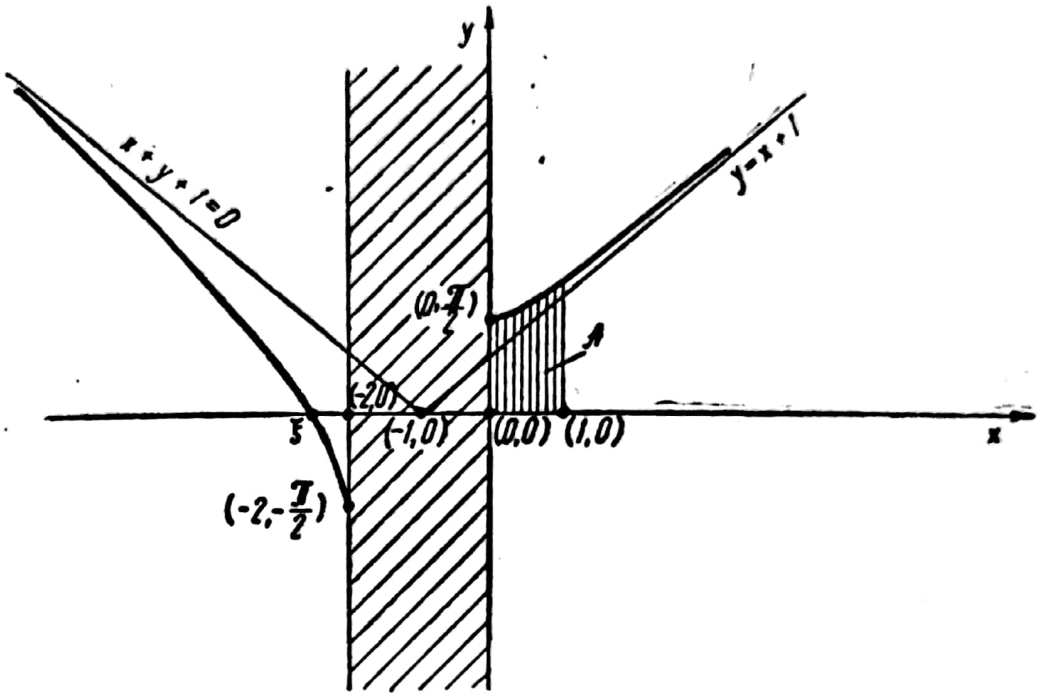


Fig. 112

3) Pe $(0, \infty)$ avem

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)\sqrt{x(2+x)}} = \frac{\sqrt{x(2+x)}}{x+1},$$

$$f''(x) = -\frac{\sqrt{x(2+x)}}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}\,\frac{x+1}{\sqrt{x(2+x)}},$$

$$f''(x) = \frac{-x(2+x) + (1+x)^2}{(x+1)^2\sqrt{x(2+x)}} = \frac{+1}{(x+1)^2\sqrt{x(2+x)}} > 0,$$

deci $f'(x)$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$.

Avem

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0+} f'(x) = 0, \quad \text{deci}$$

marginea inferioară este O și marginea superioară $+1$.

4) Pe $(0, 1)$ graficul este desupra axei Ox deci aria cerută este dată de integrala definită

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \operatorname{Arcsin}\frac{1}{1+x}\,dx + \int_0^1 \sqrt{x(x+2)}\,dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinăm mai întîi cele două primitive

$$\int \operatorname{Arcsin} \frac{1}{1+x}\,dx = \int \operatorname{Arcsin} \frac{1}{u}\,du, \quad u = x+1,$$

$$\int \operatorname{Arcsin} \frac{1}{u}\,du = u \operatorname{Arcsin} \frac{1}{u} - \int \frac{u}{\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}} \cdot \frac{-1}{u^2}\,du =$$

$$= u \operatorname{Arcsin} \frac{1}{u} + \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = u \operatorname{Arcsin} \frac{1}{u} + \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right) + C,$$

deci

$$\int \operatorname{Arcsin} \frac{1}{1+x}\,dx = (x+1) \operatorname{Arsin} \frac{1}{1+x} + \ln\left[x+1+\sqrt{x(2+x)}\right] + C,$$

$$\int \sqrt{x(x+2)}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2-1}\,dx = \int \sqrt{u^2-1}\,du, \quad u = x+1,$$

$$\int \sqrt{u^2-1}\,du = u\sqrt{u^2-1} - \int \frac{u^2}{\sqrt{u^2-1}}\,du,$$

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2-1}}\,du = \int \sqrt{u^2-1}\,du + \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}},$$

deci

$$\int \sqrt{u^2-1}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right) + C',$$

sau

$$\int \sqrt{x(2+x)}\,dx = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x(2+x)} - \frac{1}{2}\ln\left[x+1+\sqrt{x(2+x)}\right] + C'.$$

Aria cerută este dată de

$$\mathcal{A} = (x+1) \operatorname{Arcsin} \frac{1}{1+x}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln\left[x+1+\sqrt{x(x+2)}\right]\Big|_0^1 +$$

$$+ \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x(2+x)}\Big|_1^0 = 2\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3}) + \sqrt{3}.$$

64. 1) Să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = e^x - 1 - x.$$

2) Să se calculeze aria domeniului limitat de graficul funcției, axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = 1$.

1969, Institutul de construcții, București.

Scanned with OKEN Scanner

R. 1) Mulțimea de definiție este R. Pe R $f(x)$ este continuă și derivabilă.

$$f(x) = 0; \quad x = 0 .$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (e^x - 1 - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1+x}{e^x}}{e^x},$$

$$\text{însă } \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0, \text{ deci}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} e^x = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^x - 1 - x) = +\infty;$$

$$f'(x) = e^x - 1, \quad f'(x) = 0, \quad x = 0.$$

$$f''(x) = e^x, \quad f''(x) > 0, \quad x \in R.$$

Asimptote oblice:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 = m,$$

cind $x \to +\infty$, m nu este finit

$$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} (e^x - 1) = -1;$$

graficul admite asimptota oblică $y = -x - 1$.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$						0						$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$		$+$		$+$		$+$	$+$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		↘				0 min		↗				$+\infty$

Graficul este dat în figura 113.

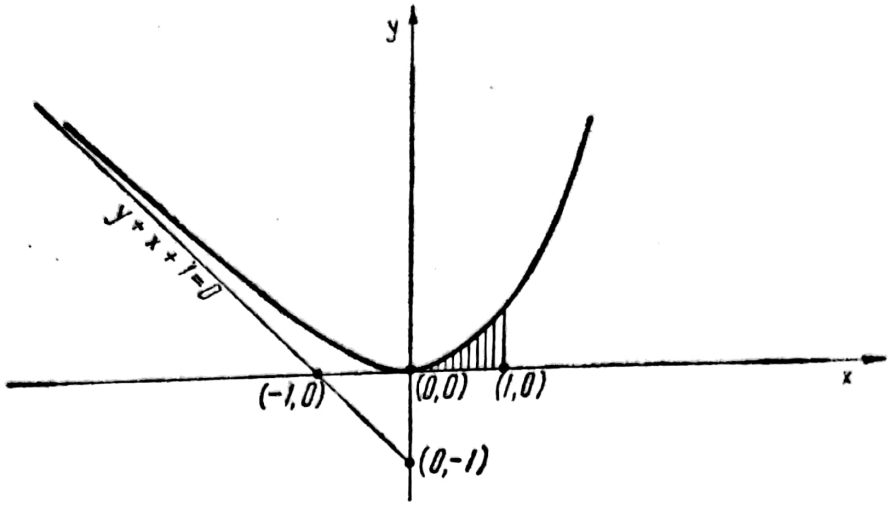


Fig. 113

2) Pe (0, 1) graficul este situat deasupra axei Ox, deci aria cerută este dată de integrala definită

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (e^x - 1 - x)\,dx = \left[e^x - x - \frac{1}{2}x^2\right]\Big|_0^1 = e - 1 - 1 - \frac{1}{2},$$

sau

$$\mathcal{A} = e - \frac{5}{2}.$$

65. Se dau funcţia

$$u(x) = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

şi funcţia

$$g(u), \qquad u \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

derivabilă de două ori pe $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$.

1) Să se determine pentru funcţia

$F(x) = \cos\,(g(u(x)) + 1)$, mulţimea de definiţie.

2) Să se calculeze $F'(x)$ şi $F''(x)$.

R. 1) Funcția $g(u)$ fiind definită pentru $u \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ și pentru că $u = \sin x$, urmează că $g(u(x))$ este definită pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$. Funcția $g(u(x)) + 1$ fiind definită tot pe $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ rezultă că

$$F(x) = \cos\ (g(\sin x) + 1)$$

este definită pe $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$. Pe $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$, $F(x)$ este continuă și derivabilă de două ori deoarece $g(\sin x)$ este continuă și derivabilă de două ori.

2) Avem

$$F'(x) = -\sin\ (g(\sin x) + 1) \cdot g'(\sin x) \cdot \cos x,$$

și

$$F''(x) = -\cos\ (g(\sin x) + 1) \cdot g'^2\ (\sin x)\ \cos^2 x -$$

$$-\sin(g(\sin x) + 1) \cdot g''(\sin x) \cdot \cos^2 x +$$

$$+\sin\ (g(\sin x) + 1) \cdot g'\ (\sin x) \cdot \sin x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right).$$

66. Se consideră funcțiile

$$f(x) = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2(1+x^2)}}, \quad g(x) = \operatorname{arctg} x,$$

și se cere:

1) să se reprezinte grafic funcția $f(x)$;

2) să se deducă relațiile:

$$f(x) + g(x) = -\frac{3\pi}{4}, \quad x \in (-\infty, -1),$$

$$f(x) - g(x) = -\frac{\pi}{4}, \quad x \in (-1, +\infty).$$

1967, Facultatea de matematică mecanică, București.

R. 1) Luăm pentru arcsin și arctg determinările principale. Trebuie să avem

$$-1 \leqslant \frac{x-1}{\sqrt{2(1+x^2)}} \leqslant +1 \text{ sau } x - 1 - \sqrt{2(1+x^2)} \leqslant 0$$

Scanned with OKEN Scanner

și $x - 1 + \sqrt{2(1 + x^2)} \geqslant 0$; prima inegalitate dă $\sqrt{(x-1)^2 + (1+x)^2} \geqslant x - 1$, adevărată pentru orice $x \in R$; a doua inegalitate se scrie $\sqrt{(x-1)^2 + (x+1)^2} + (x-1) \geqslant 0$ care de asemenea este adevărată pe $x \in R$ deci mulțimea de definiție a lui f este R.

$$f(x) = 0, \quad x = 1, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}.$$

Să calculăm derivata lui $f(x)$. Avem

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)}}} \cdot \frac{\sqrt{2(1+x^2)} - (x-1)2x[2(1+x^2)]^{-\frac{1}{2}}}{2(1+x^2)},$$

sau

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x(x-1)}{2(1+x^2)} = \frac{x+1}{|x+1|} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

deci

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x + 1 > 0, \\ -\frac{1}{1+x^2}, & x + 1 < 0. \end{cases}$$

Funcția f nu este derivabilă în punctul $x = -1$, deoarece $f'(-1-0) = -\frac{1}{2}$, $f'(-1+0) = \frac{1}{2}$; în punctul $x = -1$, f este însă continuă și ia valoarea $f(-1) = -1$.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, & x + 1 > 0, \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2}, & x + 1 < 0. \end{cases}$$

Tabloul de variație:

x	$-\infty$						-1			0		1						$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+0$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{4}$		$\searrow$				$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	0		$\nearrow$					$\frac{\pi}{4}$

Scanned with OKEN Scanner

În trasarea graficului (fig. 114) se ține seama că

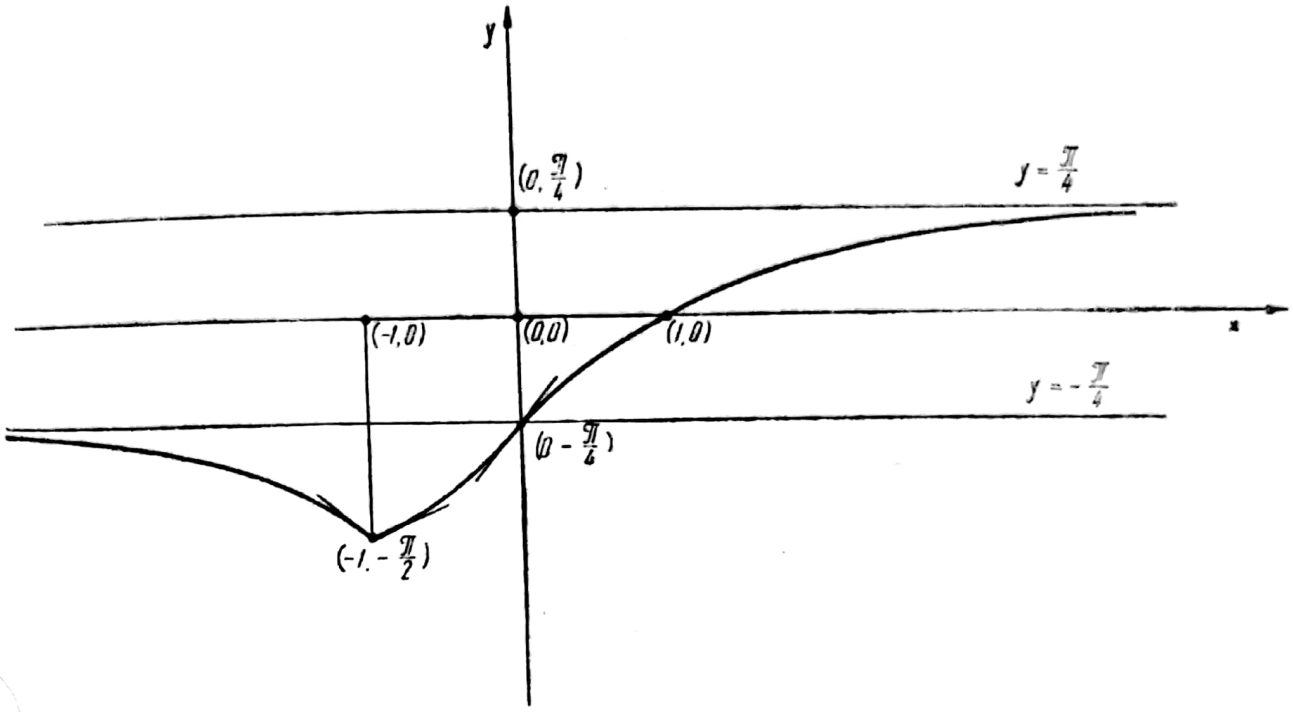


Fig. 114

$$f'(0) = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{2}, f'(-1-0) = -\frac{1}{2}, \quad f'(-1+0) = \frac{1}{2}.$$

În punctul $x = -1$, graficul are un minim, însă în acest punct derivata nu se anulează.

2) Pe $(-\infty, -1)$, funcțiile

$$y = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2(1+x^2)}}, \quad z = -\operatorname{arctg} x,$$

au aceiași derivată deci diferă printr-o constantă

$$\frac{x-1}{\sqrt{2(1+x^2)}} = \sin y, \ \sin y < 0, \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right),$$

$$-x = \operatorname{tg} z, \ \operatorname{tg} z > 0, \ z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right);$$

eliminăm pe x între cele două relații obținem

$$\frac{-(\operatorname{tg} z + 1)}{\sqrt{(1+\operatorname{tg} z)^2 + (1-\operatorname{tg} z)^2}} = \sin y,$$

$$\text{sau } \sin y + \cos\left(\frac{\pi}{4} - z\right) = 0, \ \cos\left(\frac{\pi}{4} - z\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - y\right)$$

$$\text{deci } y - z = -\frac{3\pi}{4}.$$

Pe $(-1, +\infty)$ funcțiile

$$y = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}}, \quad z = \operatorname{arctg} x,$$

au aceiași derivată, deci diferă printr-o constantă

$$\sin y = \frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}}, \; x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \; \operatorname{tg} z = x > -1,$$

deci

$z \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Eliminăm pe x între cele două relații:

$$\sin y = \frac{\operatorname{tg} z - 1}{\sqrt{(1+\operatorname{tg} z)^2 + (1-\operatorname{tg} z)^2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{4} + z\right),$$

sau

$$\sin y + \cos\left(\frac{\pi}{4} + z\right) = 0,$$

$$-\sin y = \sin(-y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right),$$

de unde

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + z\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right), \; y - z = -\frac{\pi}{4}.$$

67. Se dă

$$f(x) = \frac{\operatorname{Arctg} x - 1}{\operatorname{Arctg} x + 1} e^x$$

și se cere:

1) să se determine mulțimile de definiție, continuitate și derivabilitate;

2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic;

3) să se discute după parametrul λ numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$f(x) + \frac{2+\lambda^2}{1+\lambda^2} x = 0.$$

R. 1) Funcțiile $\operatorname{Arctg} x$ și e^{+x} sînt definite pe R. Dacă $\operatorname{arctg} x + 1 = 0$ obținem unica soluție $x_1 = -\frac{\pi}{4}$, deci mulțimea de definiție este $R - \left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$.

Mulțimile de continuitate și de derivabilitate coincid cu mulțimea de definiție.

Scanned with OKEN Scanner

2) $f(x) = 0$, $\operatorname{Arctg} x = 1$, $x_1' = \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{4} + 0} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{4} + 0} \frac{\operatorname{Arctg} x - 1}{\operatorname{Arctg} x + 1} e^x = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{4} - 0} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{4} - 0} \frac{\operatorname{Arctg} x - 1}{\operatorname{Arctg} x + 1} e^x = +\infty,$$

deci graficul admite asimptota verticală $x = -\frac{\pi}{4}$.

Avem și

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{Arctg} x - 1}{\operatorname{Arctg} x + 1} \lim_{x \to -\infty} e^x = 0,$$

prin urmare graficul admite asimptota orizontală $y = 0$.

Pe $R - \left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$, f este derivabilă:

$$f'(x) = \left[\frac{\frac{1}{1+x^2}(\operatorname{Arctg} x + 1) - \frac{1}{1+x^2}(\operatorname{Arctg} x - 1)}{(\operatorname{Arctg} x + 1)^2} + \frac{\operatorname{Arctg} x - 1}{\operatorname{Arctg} x + 1} \right] e^x,$$

sau

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{1+x^2} + (\operatorname{Arctg}^2 x - 1)}{(\operatorname{Arctg} x + 1)^2} e^x;$$

$$f'(x) = 0, \quad -\frac{x^2 - 1}{1 + x^2} + \operatorname{Arctg}^2 x = 0.$$

Pentru a afla numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f'(x) = 0$, cît și intervalele în care se găsesc, reprezentăm grafic funcțiile

$$y_1 = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad \text{și} \quad y_2 = \operatorname{Arctg}^2 x.$$

Pentru $y_1 = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ avem tabloul de variație

x	$-\infty$		-1			0			$+1$		$+\infty$
$y_1'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$y_1(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1		$\nearrow$	0	$\nearrow$		1

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $y_2 = \operatorname{Arctg}^2 x$, avem tabloul de variație

x	$-\infty$								0							$+\infty$
$y_2'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$y_2(x)$	$\frac{\pi^2}{4}$			$\searrow$					0			$\nearrow$				$\frac{\pi^2}{4}$

În figura 115 am reprezentat pe același sistem de axe cele două grafice.

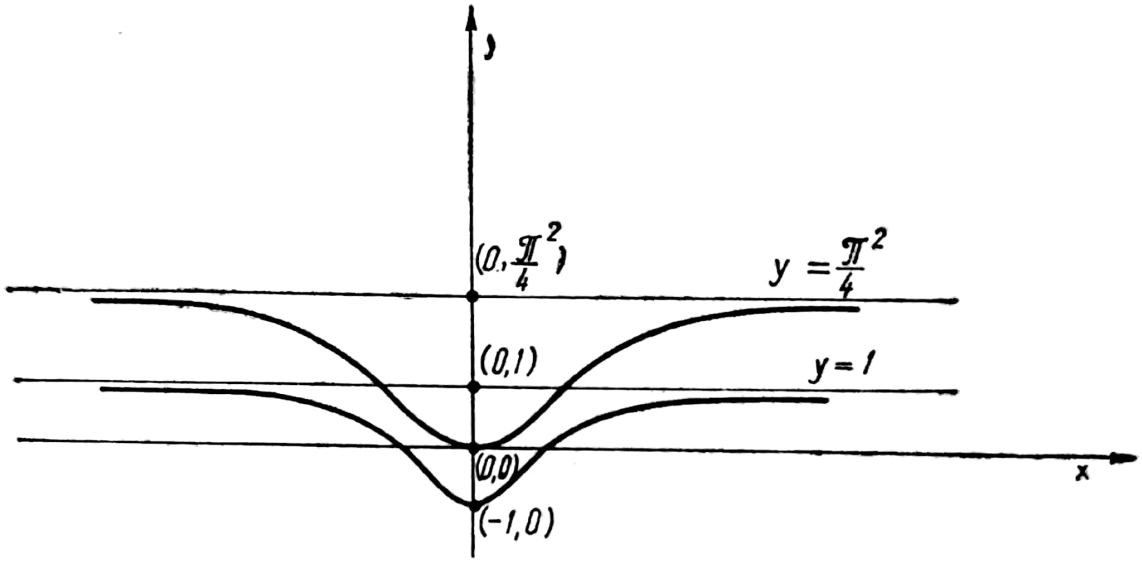


Fig. 115

Pentru $x = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{\pi^2}{16}$; pentru $x = \sqrt{3}$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{9}{\pi^2} \simeq 1$, deci cele două grafice nu au puncte comune.

Ecuația $\operatorname{Arctg}^2 x - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0$ nu are nici o rădăcină reală.

Revenind la studiul variației lui $f(x)$, putem să-i facem acum tabloul de variație

x	$-\infty$			$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$			$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$+\infty$

Graficul este dat în figura 116.

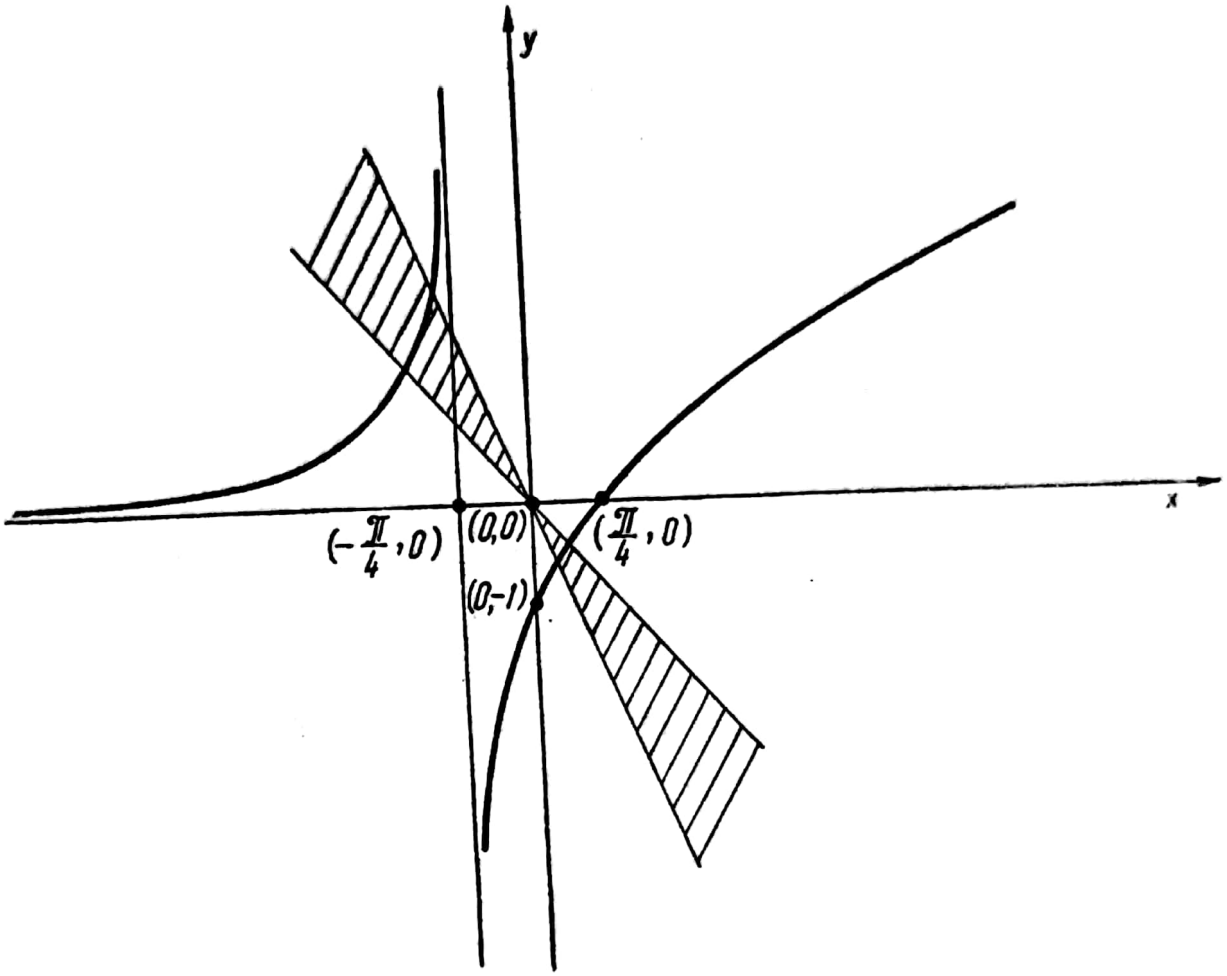


Fig. 116

3) Dacă intersectăm graficul funcției $f(x)$ cu dreapta variabilă $(D): y = -\frac{2+\lambda^2}{1+\lambda^2}x$ obținem discuția cerută.

Avem însă:

$$\frac{2+\lambda^2}{1+\lambda^2} = 1 + \frac{1}{1+\lambda^2},$$

deci coeficientul unghiular al dreptei este mărginit și avem

$$-2 \leqslant -\frac{2+\lambda^2}{1+\lambda^2} < -1.$$

Variația dreptei (D), (care trece prin origine) este zona haşurată în figura 116, de unde rezultă imediat că ecuația

$$\frac{\operatorname{Arctg} x - 1}{\operatorname{Arctg} x + 1} e^x + \frac{2+\lambda^2}{1+\lambda^2} x = 0,$$

are pentru orice $\lambda \in R$ două rădăcini reale, una pozitivă în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ și alta negativă în intervalul $\left(-\infty, -\frac{\pi}{4}\right)$.

68. Se dă polinomul

$$P(x) = (x + a)^2 + (x + b)^2.$$

1) Să se determine a și b astfel ca

$$P(x) + P'(x) \equiv 2(x + 1)^2.$$

2) Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{P(x) + P'(x)}{P(x) - P'(x)}$$

cu $a = 1$, $b = -1$.

3) Să se afle aria limitată de graficul construit, $x \in [-1, 0]$ și axele de coordonate.

1970, Institutul de construcții, București.

R. 1)

$$P(x) = 2x^2 + 2(a + b)x + a^2 + b^2,$$

$$P'(x) = 4x + 2(a + b),$$

$$P(x) + P'(x) = 2x^2 + 2(a + b + 2)x + a^2 + b^2 + 2(a + b) \equiv 2x^2 + 4x + 2,$$

deci

$$a + b + 2 = 2, \quad a^2 + b^2 + 2(a + b) = 2,$$

sau

$$a + b = 0, \quad a^2 + b^2 = 2,$$

sau

$$a + b = 0, \quad (a + b)^2 - 2ab = 2,$$

sau

$$a + b = 0, \quad ab = -1,$$

cu soluțiile

$$a_1 = 1, \quad b_1 = -1 \quad \text{și} \quad a_2 = -1, \quad b_2 = 1;$$

ambele soluții satisfac relația din enunț.

2) Pentru $a = 1$, $b = -1$ avem

$$P(x) + P'(x) = 2(x + 1)^2,$$

deci

$$P(x) - P'(x) = 2x^2 + 2 - 4x = 2(x - 1)^2,$$

$$f(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2, \quad x \in R - \{1\},$$

$$f(x) = 0, \quad x_1 = -1, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1;$$

prin urmare graficul admite asimptota orizontală $y = 1$.

Funcția f nu este definită în punctul $x = 1$. Avem

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

deci graficul admite asimptota verticală $x = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Funcția f este derivabilă pe $R - \{+1\}$

$$f'(x) = 2\frac{x+1}{x-1}\,\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = -4\frac{x+1}{(x-1)^3};$$

$$f'(x) = 0, \qquad x_1' = -1.$$

$$f''(x) = -4\frac{(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^6} = +8\frac{x+2}{(x-1)^4};$$

$$f''(0) = 0, \qquad x_1'' = -2.$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$			-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$
$f(x)$	1	$\searrow$		$\frac{1}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$		$+\infty$ $\searrow$ 1

Graficul nu are asimptote oblice (fig. 117).

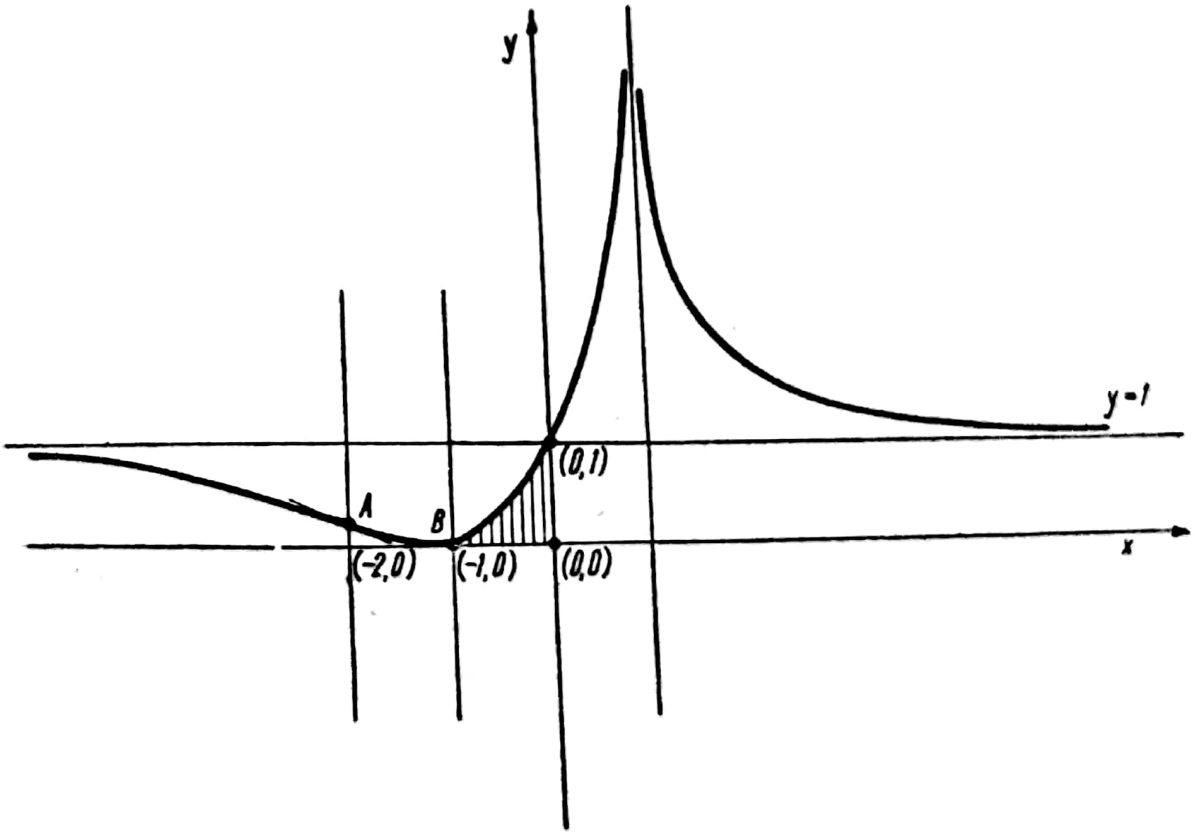


Fig. 117

În punctul de inflexiune $f'(-2) = -\frac{4}{27}$.

3) Aria cerută este dată de integrala definită

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 dx = \int_{-1}^{0} \frac{(x-1)^2+2}{(x-1)^2}\, dx,$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} \frac{(x-1)^2 + 4(x-1) + 4}{(x-1)^2}\, dx = \int_{-1}^{0} dx + 4\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x-1} + 4\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x-1)^2},$$

deci

$$\mathcal{A} = \left[x + 4\ln|x-1| - \frac{4}{x-1}\right]_{-1}^{0} = 1 - 4\ln 2 + 4 - 2,$$

sau

$$\mathcal{A} = 3 - 4\ln 2.$$

69. Se dă funcţia

$$f(x) = \min(\operatorname{sign}(\sin x) \cdot \cos x,\ \operatorname{sign}(\cos x) \cdot \sin x),\quad x \in R.$$

1) Să se arate că este o funcţie periodică.
2) Să se traseze graficul lui $f(x)$.
3) Din grafic să se deducă mulţimea de derivabilitate a lui $f(x)$.

R. 1) Funcţia $h(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in R$ este definită în modul următor

$$h(x) = \begin{cases} +1 & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

Dacă înlocuim pe x cu $\sin x$ obţinem

$$\operatorname{sign}(\sin x) = \begin{cases} +1, & \sin x > 0, \\ 0, & \sin x = 0, \\ -1, & \sin x < 0, \end{cases} \qquad x \in R,$$

cu graficul în figura 118 funcţia $\operatorname{sign}(\sin x)$ este periodică de perioadă 2π.

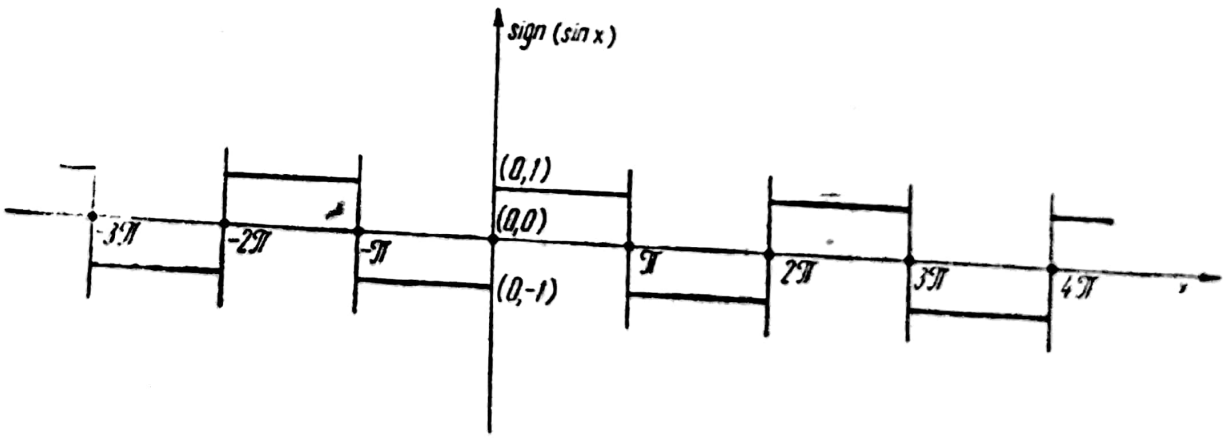


Fig. 118

Pentru funcția sign(cos x) graficul este dat în figura 119.

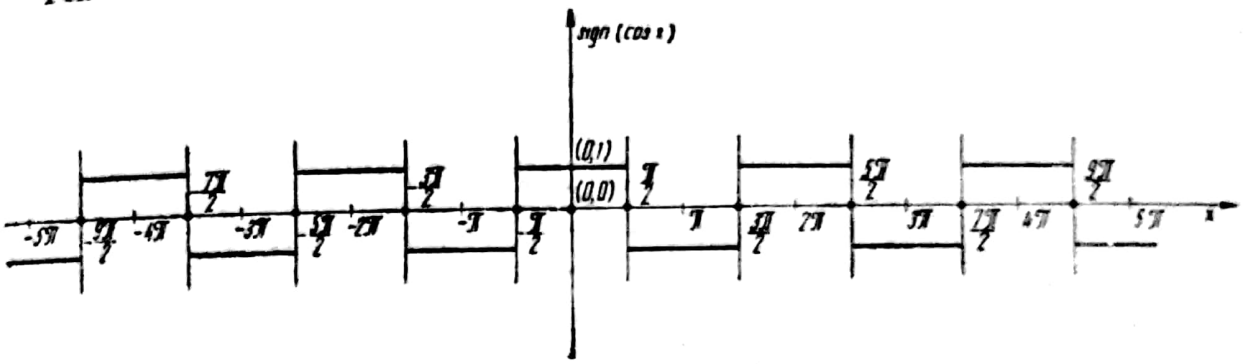


Fig. 119

Din grafic se vede că și funcția sign(cos x) este periodică de perioada 2π. Produsul a două funcții periodice de aceiași perioadă ω este tot o funcție periodică având perioada ω. Deducem de aici că $f(x)$ este periodică de perioadă 2π.

2) Pe $[0, 2\pi]$ avem

$$\operatorname{sign}(\sin x)\cdot\cos x=\begin{cases}\cos x, & x\in(0,\pi);\\ 0, & x=\pi,\\ -\cos x, & x\in(\pi,2\pi),\\ 0, & x=2\pi\end{cases}$$

$$\operatorname{sign}(\cos x)\cdot\sin x=\begin{cases}\sin x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x=\frac{\pi}{2},\\ -\sin x, & x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\\ 0, & x=\frac{3\pi}{2},\\ \sin x, & x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right],\end{cases}$$

deci pe $[0, 2\pi)$ avem

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right),\\ \cos x, & x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right],\\ -\sin x, & x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right),\\ \cos x, & x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right),\\ -\sin x, & x\in\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right),\\ -\cos x, & x\in\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right],\\ \sin x, & x\in\left(\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right),\\ -\cos x, & x\in\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right),\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu graficul dat pe $[0, 2\pi]$ în figura 120.

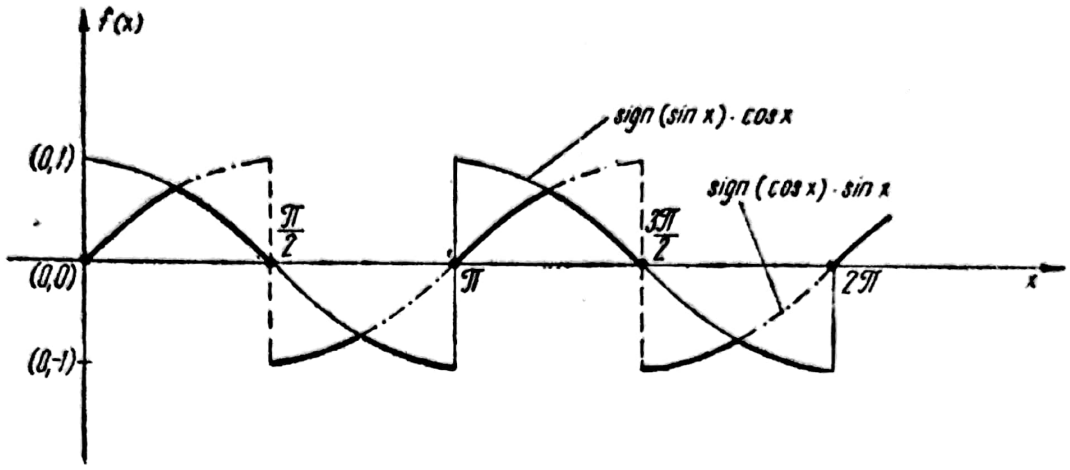


Fig. 120

Pe R graficul este dat în figura 121.

Din grafic rezultă că $f(x)$ este continuă pe $R - \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}$.

3) Din grafic mai rezultă că $f(x)$ este derivabilă pe mulțimea de continuitate cu excepția punctelor $\pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k = 0, -1, +1, \ldots$, deci mulțimea de derivabilitate este $R - \left\{k\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4} + k'\pi\right\}$, k, k' întregi.

70. Se dă funcția

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^2}\operatorname{Arctg} x + \dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}, & x > 0, \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2}\operatorname{Arctg} x - \dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}, & x \in (-1, 0) \end{cases}$$

și se cere:

1) să se determine funcția

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

care este definită pentru $x = 0$ și $F(0) = 0$;

2) să se studieze variația și să se reprezinte grafic $F(x)$ pe mulțimea sa maximă de definiție considerată pe toată axa reală;

3) să se scrie ecuațiile semitangentelor la grafic în punctul $x = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

R. 1) Considerăm $x > 0$ și integrăm prin părți

$$F^*(x) = \int \left[\frac{2}{(x+1)^2}\operatorname{Arctg} x + \frac{x-1}{x+1}\frac{1}{1+x^2}\right] dx,$$

scriem

$$F^*(x) = F_1^*(x) + F_2^*(x),$$

unde

$$F_1^*(x) = \int \frac{2}{(x+1)^2}\operatorname{Arctg} x\,dx,\ F_2^*(x) = \int \frac{x-1}{x+1}\frac{1}{1+x^2}dx;$$

pentru integrarea lui $F_1^*(x)$ punem $\frac{2}{(x+1)^2}dx = du$,

$\operatorname{Arctg} x = v$, $u = \frac{-2}{x+1}$, $dv = \frac{1}{1+x^2}dx$, deci

$$F_1^*(x) = \frac{-2}{x+1}\operatorname{Arctg} x + 2\int \frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx,$$

$$F_2^*(x) = \int \frac{x-1}{x+1}\frac{1}{1+x^2}dx = -2\int \frac{1}{x+1}\frac{1}{1+x^2}dx +$$

$$+\int \frac{dx}{1+v^2} = -2\int \frac{1}{x+1}\frac{1}{1+x^2}dx + \operatorname{Arctg} x;$$

deci $F^*(x) = F_1^*(x) + F_2^*(x) = \frac{x-1}{x+1}\operatorname{Arctg} x + C.$

Dacă notăm $f(x) = f^*(x)$, $x > 0$, rezultă că $f(x) = -f^*(x)$, $x \in (-1, 0)$, deci în afara unei constante arbitrare putem scrie

$$F(x) = \begin{cases} F^*(x), & x > 0, \\ -F^*(x), & x \in (-1, 0). \end{cases}$$

Avem

$\lim\limits_{x\to 0+} F^*(x) = \lim\limits_{x\to 0-}(-F^*(x)) = 0$, de unde rezultă că

$F(x)$ este dat de

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1}\operatorname{Arctg} x, & x > 0, \\ -\frac{x-1}{x+1}\operatorname{Arctg} x, & x \in (-1, 0), \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

sau

$$F(x) = \frac{x-1}{x+1}\operatorname{Arctg}|x|, \quad x \in (-1, +\infty).$$

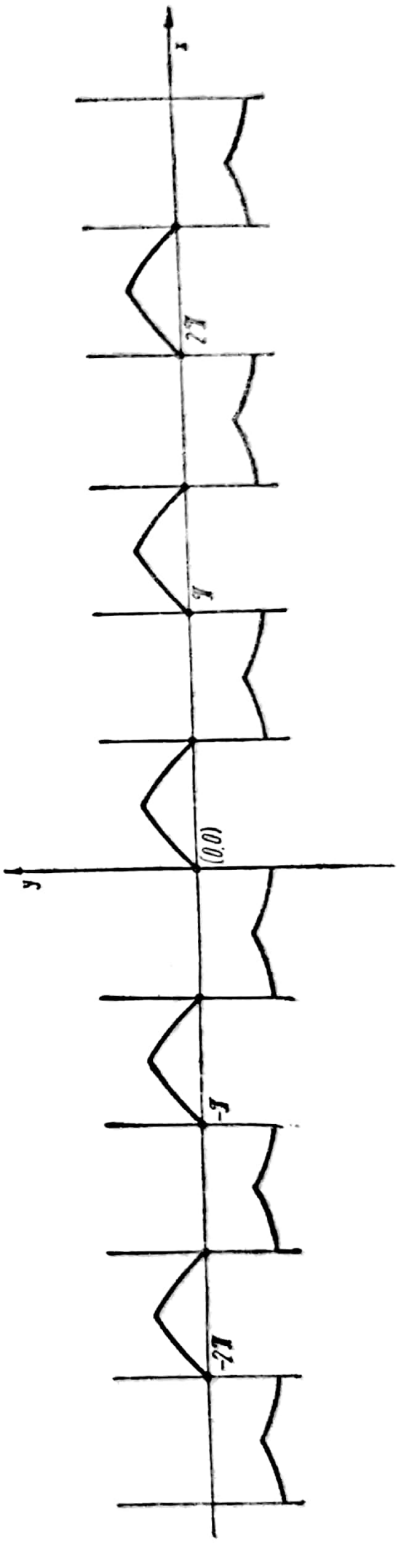


Fig. 121

Pe toată axa mulțimea de definiție, este $R - \{-1\}$.

2) $F(x) = 0, \quad x_1 = 1, \; x_2 = 0.$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x+1} \lim_{x \to \infty} \operatorname{Arctg} |x| = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x+1} \cdot \lim_{x \to -\infty} \operatorname{Arctg} |x| = \frac{\pi}{2},$$

graficul admite asimptota orizontală $y = \frac{\pi}{2}$;

$$\lim_{x \to -1-0} F(x) = \lim_{x \to -1-0} \frac{x-1}{x+1} \cdot \lim_{x \to -1-0} \operatorname{Arctg} |x| = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -1+0} F(x) = \lim_{x \to -1+0} \frac{x-1}{x+1} \cdot \lim_{x \to -1+0} \operatorname{Arctg} |x| = -\infty.$$

Graficul admite asimptota verticală $x = -1$.

Pentru $x > 0$ avem

$$F'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \operatorname{Arctg} x + \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1}{1+x^2},$$

sau

$$F'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \left(2 \operatorname{Arctg} x + \frac{x^2-1}{x^2+1} \right).$$

În figura 122 intersectăm graficele funcțiilor $y_1 = 2\operatorname{Arctg} x$ și $y_2 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, de unde rezultă că există un punct $\xi \in (0, 1)$ pentru care $F'(x) = 0$. Pentru $x < 0$, $F'(x)$ nu se anulează.

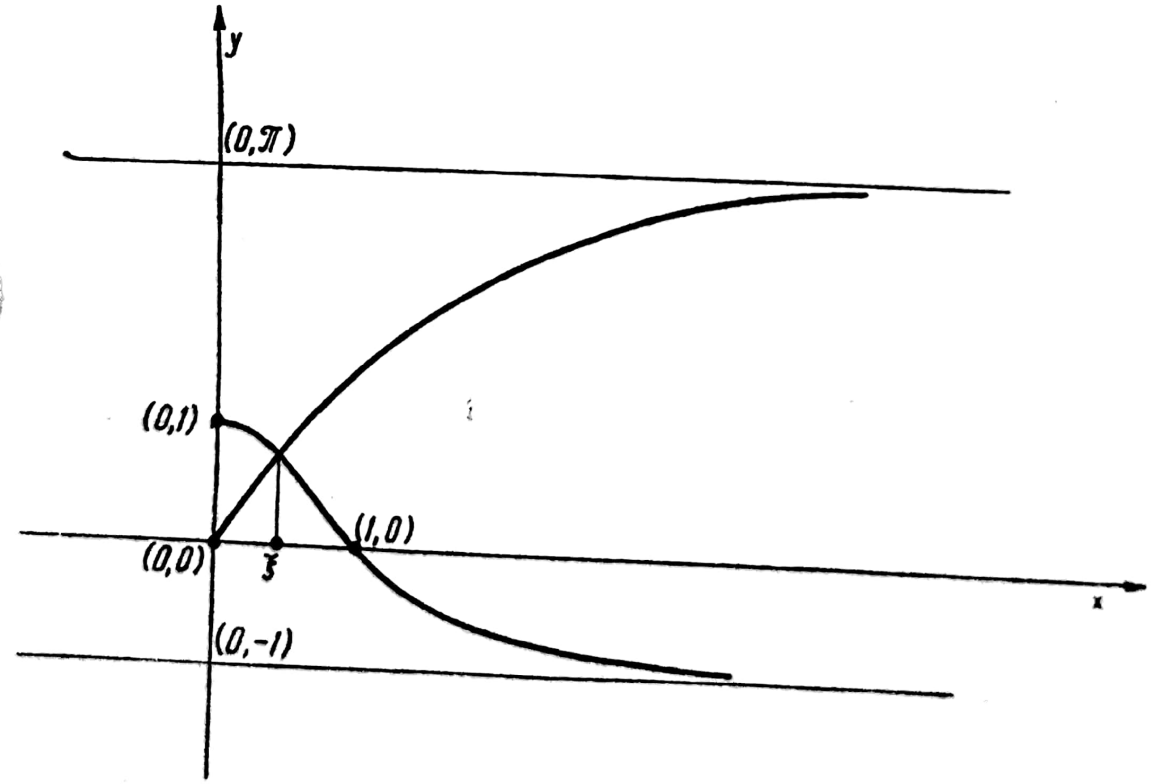


Fig. 122

Tabloul de variație

x	$-\infty$					-1			0			ξ		$+1$				$+\infty$
$F'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$F(x)$	$\frac{\pi}{2}$		$\nearrow$		$+\infty$	$-\infty$		$\nearrow$	0		$\searrow$	$F(\xi)$	$\nearrow$	0		$\nearrow$		$\frac{\pi}{2}$

$$F(\xi) = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{(1-\xi)^2}{1+\xi^2} < 0, \quad \xi \simeq \frac{1}{2}, \quad F(\xi) = -\frac{1}{6}.$$

În trasarea graficului se ține seama că

$$F'(0-) = +1, \quad F'(0+) = -1, \quad F'(1) = \frac{\pi}{8}.$$

Graficul este dat în figura 123.

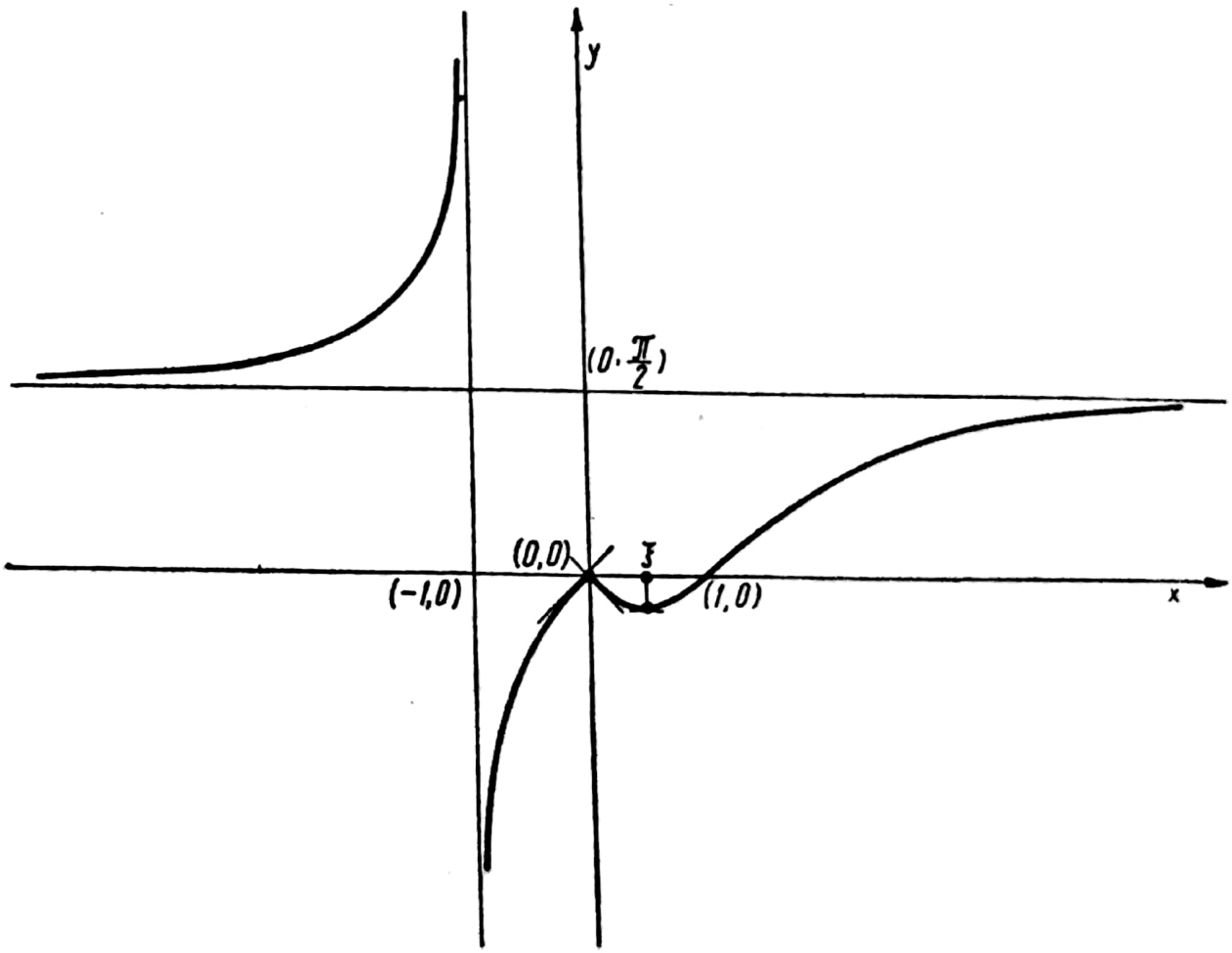


Fig. 123

Scanned with OKEN Scanner

3) Avem $F(0) = 0$, deci ecuațiile semitangentelor la grafic sînt

$$y = -x, \quad x > 0, \qquad y = x, \quad x < 0$$

sau într-o singură ecuație care le cuprinde pe amîndouă

$$y + |x| = 0, \qquad x \in R.$$

71. Se dă funcția

$$f(x) = \int \left[\frac{4}{(x+2)^2} \ln |x| + \frac{x-2}{x+2} \frac{1}{x} \right] dx, \; x > 0$$

și se cere:

1) să se determine primitiva $f(x)$ care satisface condiția $f(1) = 0$;

2) să se reprezinte grafic funcția $f(x)$ astfel determinată, pe mulțimea sa maximă de definiție considerată pe toată axa reală;

3) să se calculeze integrala definită:

$$A = \int_1^2 (x+2) \cdot \ln x \cdot f(x)\, dx.$$

R. 1) Integrăm prin părți pe

$$I = \int \frac{x-2}{x+2} \frac{1}{x} dx;$$

punem $dv = \frac{1}{x} dx$, $u = \frac{x-2}{x+2}$, $v = \ln |x|$, $du = \frac{4}{(x+2)^2}$; obținem

$$I = \frac{x-2}{x+2} \ln |x| - \int \frac{4}{(x+2)^2} \ln |x|\, dx,$$

deci

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2} \ln |x| + C, \; x > 0,$$

Să integrăm prin părți pe

$$I^* = \int \frac{4}{(x+2)^2} \ln |x|\, dx;$$

$$u = \ln |x|, \; dv = \frac{4}{(x+2)^2} dx, \; du = \frac{1}{x} dx, \; v = -\frac{4}{x+2},$$

deci

$$I^* = -\frac{4}{x+2}\ln|x| + \int \frac{4}{x(x+2)}\,dx,$$

$$\int\left[\frac{4}{x(x+2)} + \frac{x-2}{x+2}\,\frac{1}{x}\right]dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|,$$

sau

$$f(x) = \left(-\frac{4}{x+2} + 1\right)\ln|x| + C = \frac{x-2}{x+2}\ln|x| + C, \qquad x > 0.$$

Pentru $x = 1$, trebuie ca $f(1) = 0 = C$.

2) Avem de studiat variația funcției

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2}\ln|x|, \qquad x \in R - \{0, -2\}$$

deoarece mulțimea sa maximă se definește pe toată axa relă este $R - \{0, -2\}$.

$$f(x) = 0, \qquad x_1 = 2, \qquad x_1 = 1, \qquad x_3 = -1.$$

$$\lim_{x\to -2+0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -2-0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty,$$

graficul admite asimptotele verticale $x = -2$, $x = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x+2} \cdot \lim_{x\to\infty} \ln|x| = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-2}{x+2} \lim_{x\to -\infty} \ln|x| = +\infty,$$

Graficul nu admite asimptota oblică.

Mulțimea de derivabilitate este $R - \{0, -2\}$.

$$f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}\ln|x| + \frac{x-2}{x+1}\,\frac{1}{x};$$

$$f'(x) = 0, \qquad 4x\ln|x| + x^2 - 4 = 0,$$

sau

$$\ln|x| = \frac{4-x^2}{4x}.$$

Luăm intersecția graficelor celor două funcții $y_1 = \ln|x|$, $y_2 = \frac{4-x^2}{4x}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru y_1 graficul este dat in figura 124.

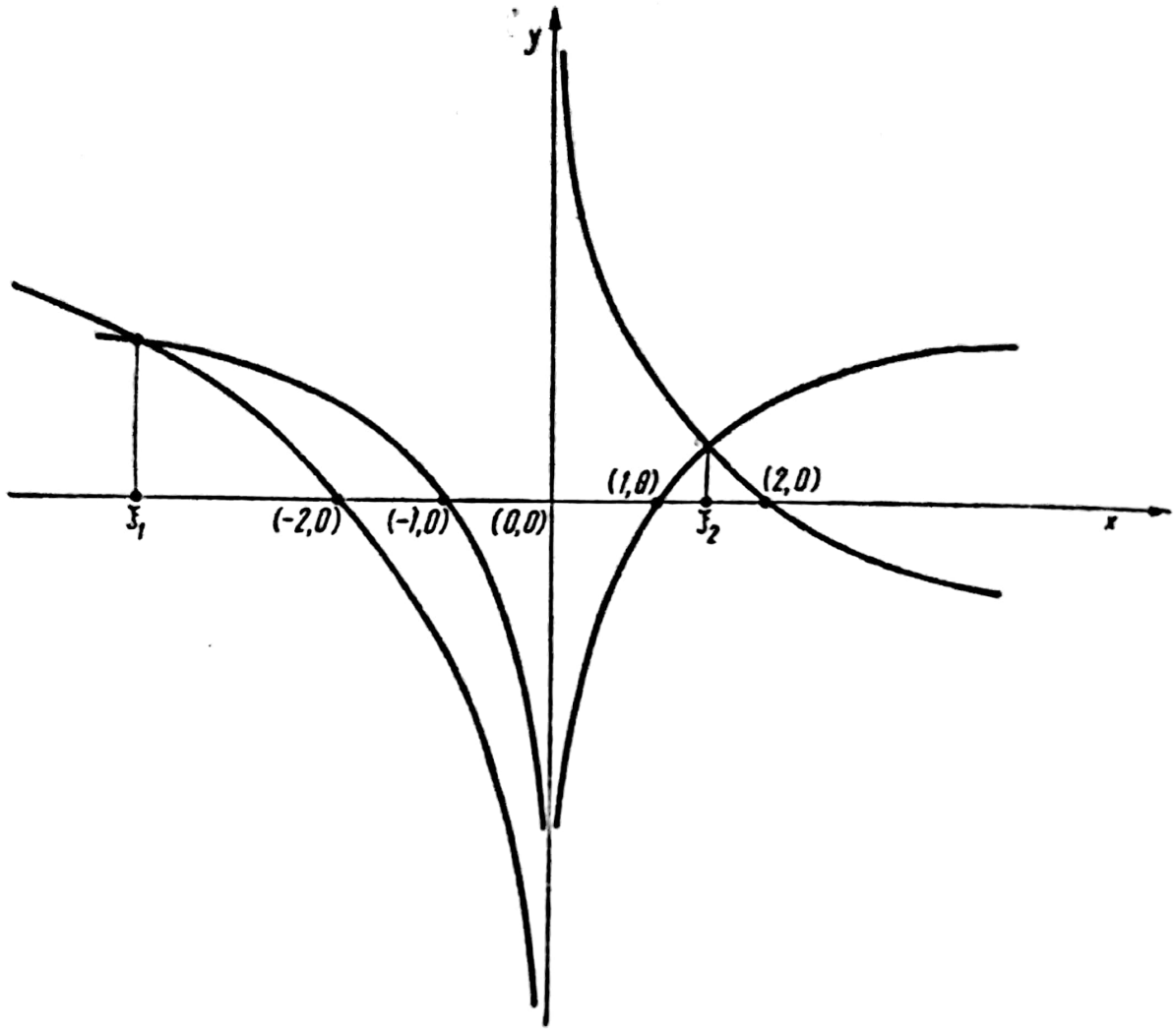


Fig. 124

$$y_2 = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2, \quad y_2' = \frac{-2x \cdot x - (4 - x^2)}{4x^2},$$

$$y_2' = \frac{-1}{4} \frac{4 + x^2}{x^2}, \quad y_2'(x) < 0, \quad x \in R - \{0\}.$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$			-2			0			2			$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
y_2	$+\infty$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0		$\searrow$		$-\infty$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul îl reprezentăm tot pe figura 124. Cele două curbe se intersectează în două puncte $\xi_1 < -2$, $\xi_2 \in (1, 2)$.

Revenim la studiul variației lui $f(x)$.

Tabloul de variație

x	$-\infty$		ξ_1		-2		-1		0		1		ξ_2		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\xi_1)$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(\xi_2)$	$\nearrow$	0 $\nearrow$ $+\infty$

Avem $\ln|\xi_1| = \frac{4-\xi_1^2}{4\cdot\xi_1}$, deci

$$f(\xi_1) = \frac{\xi_1 - 2}{\xi_1 + 2}\,\frac{4-\xi_1^2}{4\xi_1} = -\frac{(\xi_1-2)^2}{4\cdot\xi_1} > 0, \qquad \xi_1 < -2,$$

$$f(\xi_2) = -\frac{(\xi_2-2)^2}{4\xi_2} < 0 \text{ deoarece } \xi_2 > 1.$$

Graficul este dat în figura 125.

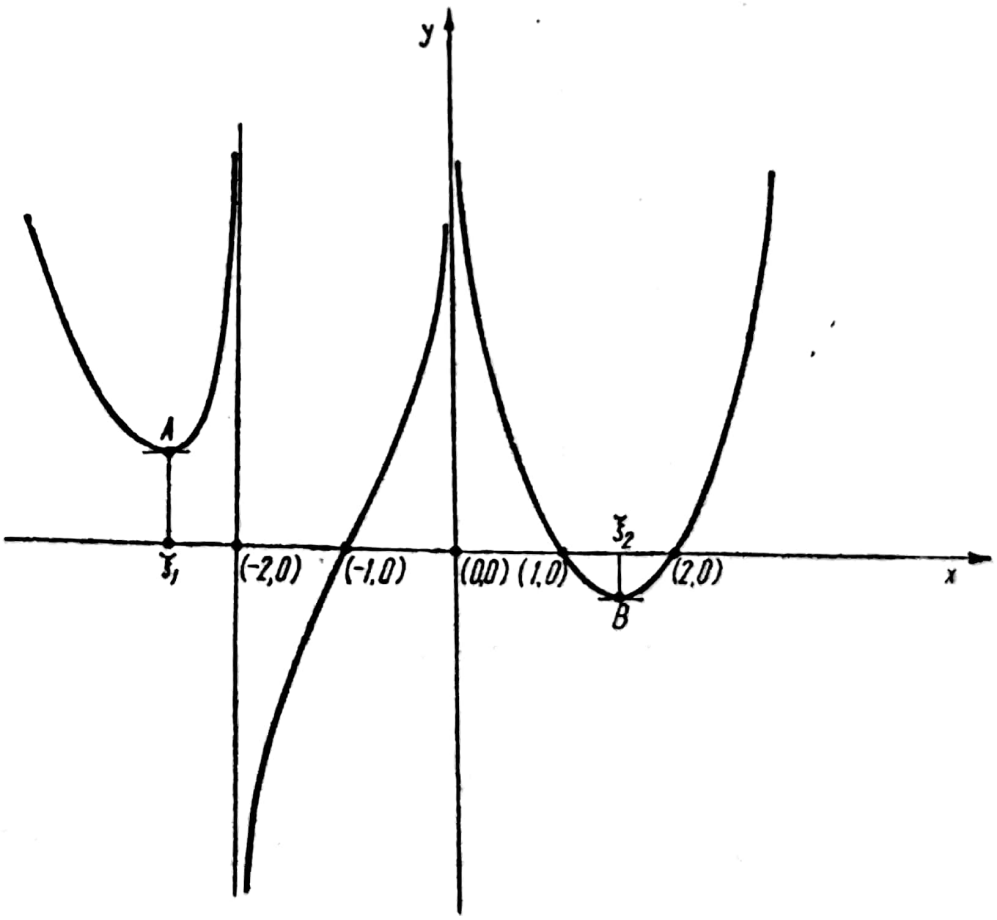


Fig. 125

3) Pe (1, 2) avem

$$(x+2)\ln x f(x) = (x-2)\ln^2 x,$$

deci

$$A = \int_1^2 x\ln^2 x\,dx - 2\int_1^2 \ln^2 x\,dx.$$

Fie

$$A_1 = \int_1^2 x\ln^2 x\,dx, \quad A_2 = \int_1^2 \ln^2 x\,dx;$$

integrăm prin părți pe A_1:

$$u = \ln^2 x, \qquad x\,dx = dv,$$

$$du = \frac{2}{x}\ln x\,dx, \quad v = \frac{1}{2}x^2,$$

$$A_1 = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\ln x\,dx,$$

sau

$$A_1 = \left[\frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + \frac{3}{4}.$$

Pe A_2 îl integrăm tot prin părți: $u = \ln^2 x$, $dv = dx$,

$$du = \frac{2}{x}\ln x\,dx, \qquad v = x,$$

$$A_2 = x\ln^2 x\Big|_1^2 - 2\int_1^2 \ln x\,dx,$$

deci

$$A_2 = [x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x]_1^2 = 2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2;$$

$$A = A_1 - 2A_2 = -2\ln^2 2 + 6\ln 2 - \frac{13}{4}.$$

72. Se dă ecuația diferențială

$$4y' = (7 - 8x - 12x^2)\,y^5$$

și se cere:

1) să se integreze;

2) să se determine soluția care satisface condiția

$$y(1) = \sqrt[4]{\frac{1}{3}};$$

3) să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția astfel determinată;

4) să se găsească numărul punctelor de inflexiune ale graficului cît și intervalele în care se găsesc.

Scanned with OKEN Scanner

R. 1) Se separă variabilele în ecuația din enunț

$$4\frac{dy}{y^5} = (7 - 8x - 12x^2)dx,$$

$$4\int \frac{dy}{y^5} = \int (7 - 8x - 12x^2)dx,$$

sau

$$-\frac{1}{y^4} = 7x - 4x^2 - 4x^3 + C,$$

sau

$$y^4 = \frac{1}{4x^3 + 4x^2 - 7x - C},$$

deci

$$y(x) = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{4x^3 + 4x^2 - 7x - C}}. \qquad (\alpha)$$

2) $y(1) = +\sqrt[4]{\frac{1}{1 - C}}, \quad C = -2,$

soluția (α) cu minus nu dă nici un rezultat deoarece valoarea pentru $x = 1$ este pozitivă.

Am obținut soluția

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{4x^3 + 4x^2 - 7x + 2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{(2x - 1)^3(x + 2)}}.$$

3) Mulțimea de definiție a lui f este $(-2, +\infty) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$,

$$\lim_{x \to -2+0} f(x) = +\infty,$$

deci graficul admite asimptota verticală $x = -2$;

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = +\infty,$$

graficul admite și asimptota verticală $x = \frac{1}{2}$;

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

deci graficul admite asimptota orizontală $y = 0$; nu admite asimptote oblice.
Pe mulțimea de definiție f este continuă și derivabilă

$$f'(x) = \left[(2x - 1)^{-\frac{1}{2}}(x + 2)^{-\frac{1}{4}}\right]' = -(2x - 1)^{-\frac{3}{2}}(x + 2)^{-\frac{1}{4}} -$$

$$-\frac{1}{4}(2x - 1)^{-\frac{1}{2}}(x + 2)^{-\frac{5}{4}} = \frac{-(x + 2) - \frac{1}{4}(2x - 1)}{\sqrt[4]{(2x - 1)^6(x + 2)^5}},$$

$$f'(x) = -\frac{1}{4}\frac{(6x + 7)(2x - 1)}{\sqrt[4]{(2x - 1)^{10}(x + 2)^5}};$$

$$f'(x) = 0, \quad x_1 = -\frac{7}{6}; \quad f\left(-\frac{7}{6}\right) = \sqrt[4]{\frac{3^3}{2 \cdot 5^3}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variație

x	-2		$-\frac{7}{6}$			$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +$	$+$	$+$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -$		
$f(x)$	∞	$\searrow$	$\sqrt[4]{\frac{3^3}{2\cdot 5^3}}$	$\nearrow$	$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$	$\nearrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\searrow$	0
			A					

Graficul este dat în figura 126.

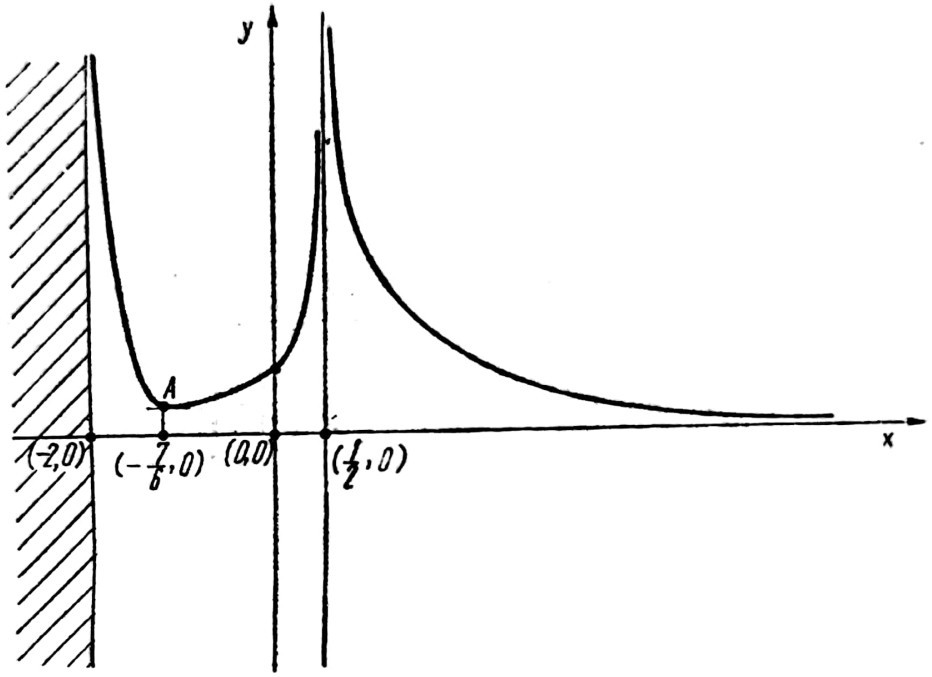


Fig. 126

4) Trebuie să calculăm pe $f''(x)$. Avem

$$f'(x) = -(2x-1)^{-\frac{3}{2}}(x+2)^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}(2x-1)^{-\frac{1}{2}}(x+2)^{-\frac{5}{4}},$$

deci

$$f''(x) = 3(2x-1)^{-\frac{5}{2}}(x+2)^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}(2x-1)^{-\frac{3}{2}}(x+2)^{-\frac{5}{4}} +$$

$$+ \frac{1}{4}(2x-1)^{-\frac{3}{2}}(x+2)^{-\frac{5}{4}} + \frac{5}{16}(2x-1)^{-\frac{1}{2}}(x+2)^{-\frac{9}{4}},$$

sau

$$f''(x) = (x+2)^{-\frac{9}{4}}(2x-1)^{-\frac{5}{2}}\left[3(x+2)^2 + \frac{1}{2}(2x-1)(x+2) + \frac{5}{16}(2x-1)^2\right],$$

sau

$$f''(x) = \frac{1}{16}(x+2)^{-\frac{9}{4}}(2x-1)^{-\frac{1}{2}}\left[48\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^2 + 8\frac{x+1}{2x-1} + 5\right];$$

$$f''(x) = 0 \text{ pentru } 48\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^2 + 8\frac{x+1}{2x-1} + 5 = 0.$$

Dacă punem $\frac{x+2}{2x-1} = u$ obținem ecuația de gradul al doilea $48u^2 + 8u + 5 = 0$ care are rădăcini imaginare, prin urmare $f''(x)$ nu se anulează pe mulțimea de definiție al lui f. Graficul nu are puncte de inflexiune.

Observație. Soluția de la pct. 2 este definită pe $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. La pct. 3 s-a studiat variația și s-a reprezentat grafic extensia ei la R.

73. Se dă funcția

$$f(x) = \max(\operatorname{tg} x, \sin 2x),\ x \in [0, \pi]$$

și se cere:

1) să se găsească mulțimea de derivabilitate;
2) să se stabilească intervalele de monotonie.

R. 1) Formăm funcția

$$h(x) = \operatorname{tg} x - \sin 2x = \sin x\left(\frac{1}{\cos x} - 2\cos x\right),$$

sau

$$h(x) = \sin x \frac{1 - 2\cos^2 x}{\cos x};$$

$$h(x) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = \frac{\pi}{4},\ x_4 = \frac{3\pi}{4}.$$

Tabloul de variație al lui $h(x)$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin x$	0 + + + + + + + + + + + + +				0
$\cos x$	+ + + + + + 0 − − − − − − − − −				
$1 - 2\cos^2 x$	− − − − 0 + + + + + + + + +		+ + + + + 0 − − −		
$h(x)$	0 − − − − 0 + + + + + + + + + ∞		$-\infty$ − − − − − − 0 + + + + +		0

Funcția $f(x)$ nu este definită în $\frac{\pi}{2}$, deci mulțimea de definiție este $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Deoarece $f(x)$ este definită în fiecare punct al mulțimii de definiție rezultă

Scanned with OKEN Scanner

că în fiecare punct ia valoarea cea mai mare dintre valorile celor două funcții $\operatorname{tg} x$ și $\sin 2x$. Ținînd seama de acest fapt, urmează că pe $[0, \pi] - \{0\}$, $f(x)$ este dată de

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right), \\ \operatorname{tg} x, & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \sin 2x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right], \\ \operatorname{tg} 2x, & x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]. \end{cases}$$

Graficul lui $f(x)$ este dat în figura 127. Pe același sistem de axe s-au trasat graficele lui $\operatorname{tg} x$ și $\sin 2x$, apoi s-a pus în evidență graficul lui $f(x)$.

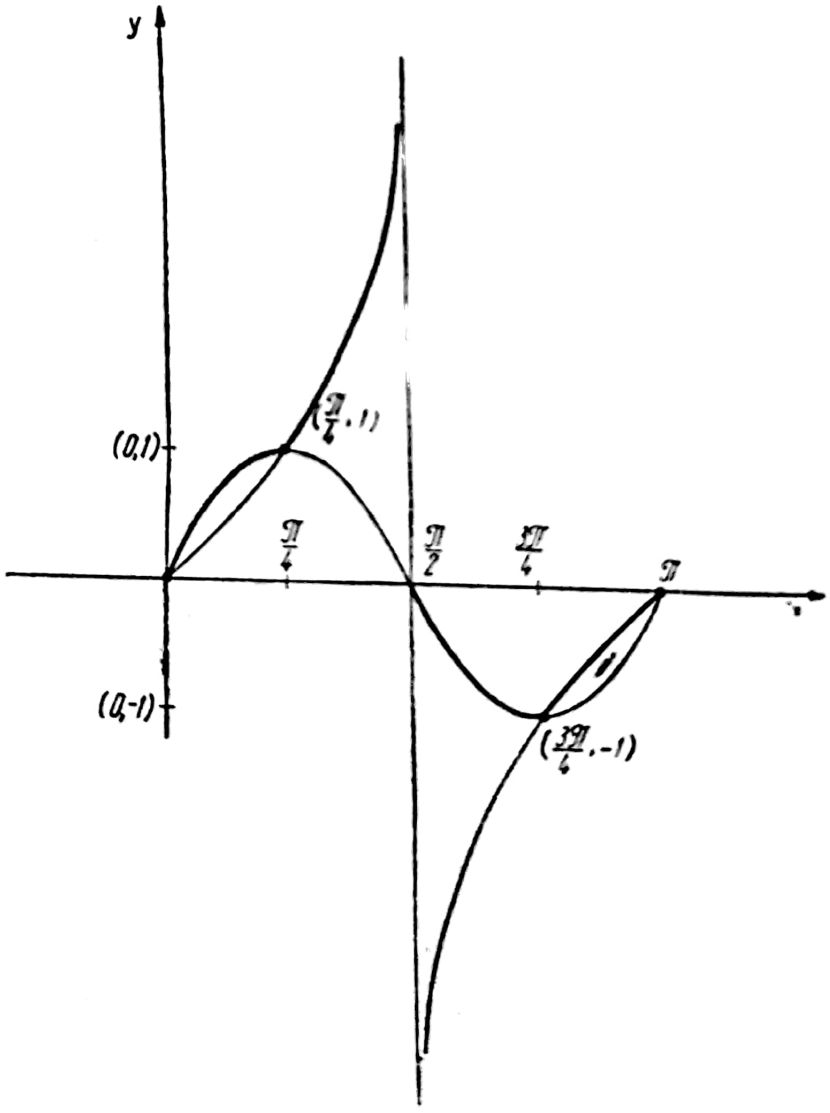


Fig. 127

Funcția $f(x)$ este continuă pe mulțimea de definiție. Deoarece tg x și sin $2x$ sînt derivabile pe mulțimea de definiție, rezultă că problema derivabilității nu se pune decît în punctul $\frac{\pi}{4}$ și $\frac{3\pi}{4}$. Deoarece în aceste puncte $f(x)$ este continuă nu avem de calculat decît derivatele la dreapta și la stînga în aceste puncte și să le comparăm. Avem

$$(\sin 2x)'\Big|_{\frac{\pi}{4}} = 2\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{4}} = 0,\quad (\operatorname{tg} x)'\Big|_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos^2 x}\Big|_{\frac{\pi}{4}} = 2,$$

$$(\sin 2x)'\Big|_{\frac{3\pi}{4}} = 2\cos 2x\Big|_{\frac{3\pi}{4}} = 0,\quad (\operatorname{tg} x)'\Big|_{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\cos^2 x}\Big|_{\frac{3\pi}{4}} = 2.$$

Funcția $f(x)$ nu este derivabilă în aceste două puncte.

2) Din grafic rezultă că pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)$ este crescătoare, pe $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ este descrescătoare, iar pe $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ este crescătoare.

74. Se dă funcția

$$f(x) = \min\left[\ln\frac{1}{|x|}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right],\quad x \in R - \{0\}$$

și se cere:

1) mulțimea de derivabilitate a lui $f(x)$;

2) intervalele pe care $f''(x)$ păstrează un semn constant.

R. 1) Formăm funcția

$$h(x) = \ln\frac{1}{|x|} - \frac{x^2-1}{x^2+1} = -\ln|x| - \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Avem $h(x) = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = +1$.

Notăm $h_1(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ și studiem variația acestei funcții. Mulțimea de definiție este R.

$$h_1(x) = 0,\ x_1' = -1,\ x_2' = +1,$$

$$h_1'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2},\ h_1'(x) = 0,\ x_1'' = 0.$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$h_1(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$-$
$h_1(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Notăm $h_2(x) = \ln\frac{1}{|x|} = -\ln|x|$ și studiem variația acestei funcții. Mulțimea de de definiție $R - \{0\}$.

$$h_2(x) = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = -1.$$

$$h_2'(x) = -\frac{1}{x}.$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$		$-e$		-1		0		1		e		$+\infty$
$h_2'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\|$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$h_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$ $-\infty$

Reprezentăm pe același grafic cele două funcții în figura 128 apoi punem în evidență graficul lui $f(x)$.

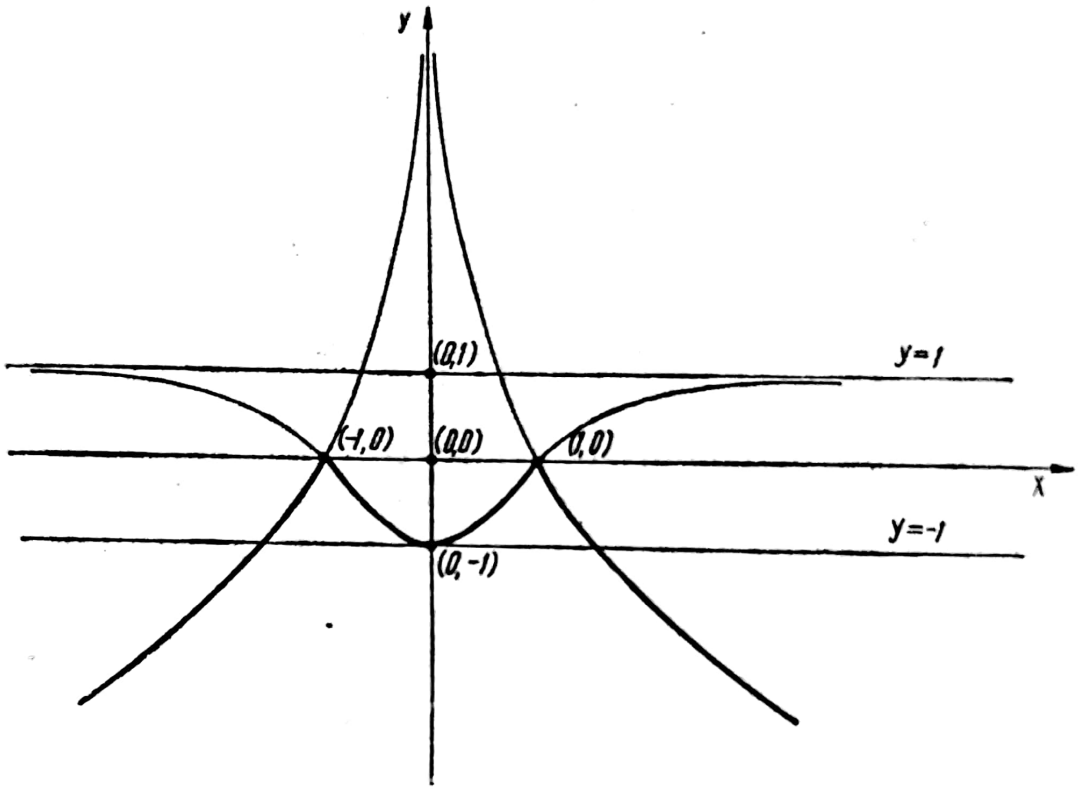


Fig. 128

Din grafic cît și din tabloul de variație rezultă că

$$f(x) = \begin{cases} \ln \dfrac{1}{|x|}, & x \in (-\infty, -1), \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x \in [-1, 0), \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x \in (0, 1], \\ \ln \dfrac{1}{|x|}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

În punctul $x = 0$, $f(x)$ nu este definită deoarece $\ln \dfrac{1}{|x|}$ nu este definită și nu se pot compara valorile celor două funcții în acest punct.

Scanned with OKEN Scanner

Funcția $f(x)$ este derivabilă pe mulțimea de definiție cu excepția cel mult a punctelor -1 și $+1$ în care $f(x)$ este continuă. În punctul $x = 0$ nu se pune problema derivabilității deoarece în acest punct $f(x)$ nu este definită.

Deoarece în punctele -1 și 1, $f(x)$ este continuă, trebuie să calculăm derivatele laterale în aceste puncte și să le comparăm.

Avem

$$\left[-\ln|x|\right]'_{-1} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1} = +1, \quad \left[-\ln|x|\right]'_{+1} = -\frac{1}{x}\Big|_{+1} = -1,$$

$$\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]'_{-1} = \frac{+4x}{(1+x^2)^2}\Big|_{-1} = -1, \quad \left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]'_{+1} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}\Big|_{+} = +1,$$

deci $f(x)$ nu este derivabilă în aceste puncte.

2) Pe mulțimea de derivabilitate $f(x)$ are și derivate de ordinul doi. Avem

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \in (-\infty, -1), \\ 4 \cdot \dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}, & x \in (-1, 0) \cup (0, +1), \\ \dfrac{1}{x^2}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Tabloul de variație al semnului lui $f''(x)$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		$+\infty$
$f''(x)$	+	+	+	+	−	−	−	0	+	+	+	+	+	0	−	−	−	+	+	+	+

În punctele -1, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 1, graficul lui $f(x)$ schimbă de concavitate.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINSUL

Cap. I **Şiruri numerice, şiruri monotone, şiruri convergente. Progresii. Serii numerice** 7

Cap. II **Funcţii. Limite. Continuitate. Funcţii derivabile, derivate. Formula creşterilor finite. Teorema lui Rolle. Forme nedeterminate. Extreme, intervale de monotonie. Derivate de ordin superior** 85

Cap. III **Reprezentări grafice, discuţia grafică a ecuaţiilor. Funcţii hiperbolice** 99

Cap. IV **Integrale nedefinite, integrale definite. Aplicaţii: arii, centre de greutate, momente de inerţie etc. Teorema lui Guldin** 133

Cap. V **Ecuaţii diferenţiale de ordinul I. Ecuaţii cu variabile separabile. Soluţia generală, soluţia problemei lui Cauchy. Ecuaţii diferenţiale de ordinul II** 185

Cap. VI **Probleme compuse: analiză matematică cu trigonometrie, analiză matematică cu algebră, analiză matematică cu geometrie, analiză matematică cu trigonometrie şi algebră etc. Probleme date la examenele de admitere** 197